Exercice 71

1. M est une matrice triangulaire supérieur donc

$\chi_M = X^2(X-1)^2(X-3)$

rg $M \geqslant 3$ car les 3 dernières colonnes sont non coplanaires

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \in E_0(M)$ donc $E_0(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ donc dim $E_0(M) = 2$?

$M - I_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$! rg$(M - I_5) = 3$ donc par thm du rang dim $E_1(M) = 2$

Parler de la vp simple aussi

Ainsi chaque sous-espace propre ~~ont~~ a la même dimension que la multiplicité des valeurs propres auxquels ils sont associés

Donc par caractérisation M est diagonalisable

Ainsi le polynôme minimal est $\pi_M = X(X-1)(X-3)$

2. <u>Analyse</u> :

Supposons qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ tel que $\left| \begin{array}{l} M = A+B \\ A^2 = A \\ B^2 = 3B \\ AB = BA = 0_5 \end{array}\right.$

On a,

$\begin{cases} M = A+B \\ M^2 = A^2 + B^2 + AB + BA \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} M = A+B \\ M^2 = A^2 + B^2 \end{cases}$ car $AB = BA = 0_5$

Dans une analyse, pas de $\Leftrightarrow$ (sauf solu° DSE d'équa diff)

$\Leftrightarrow \begin{cases} M = A+B \\ M^2 - M = 2B \end{cases}$

On $M^2 - M = \begin{pmatrix} & 6 \\ & 0 \\ (0) & -12 \\ & 0 \\ & 6 \end{pmatrix} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} & 3 \\ & 0 \\ (0) & -6 \\ & 0 \\ & 3 \end{pmatrix}}_{= B}$

Ainsi, $M - B = A$ donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

<u>Synthèse</u>

Si on a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

On a bien $M = A+B$, $A^2 = A$, $B^2 = 3B$ et $AB = 0_5 = BA$

3. rg $B = 1$ et rg $A \geqslant 2$ car C_1 et C_4 sont non colinéaires

On $\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{non coplanaires}} \in \mathrm{Ker}\, A$ donc rg $A = 2$

4. $m \in \mathbb{N}^*$

$$M^m = (A+B)^m$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^{m-k} B^k \quad \text{car } AB = BA$$

$$= \cancel{\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A\, 3^{k-1} B}$$

car $A^2 = A$ puis par récurrence pour $\ell \in \mathbb{N}^*$ $A^\ell = A$

$B^2 = 3B$ ——— pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, $B^\ell = 3^{\ell-1} B$

$$= \cancel{\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 3^{k-1}\right) AB}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 3^{k-1}\right) \underbrace{AB}_{=0_3} + A^n + B^n$$

$$\boxed{M^n = A + 3^{n-1} B}$$

(cohérent pour $n = 1$)