

Exercice n° 64

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2A^2 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} A^3 & 3A^3 \\ 0 & A^3 \end{pmatrix}$$

Soit $m \in \mathbb{N}$,

$$P_m = "B^m = \begin{pmatrix} A^m & mA^m \\ 0 & A^m \end{pmatrix}"$$

Initialisation :

$$m=0, \quad B^0 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \quad \text{OR}$$

Hérédité :

Soit $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} B^{m+1} &= B^m B \\ &= \begin{pmatrix} A^m & mA^m \\ 0 & A^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \text{par HR} \\ &= \begin{pmatrix} A^{m+1} & (m+1)A^{m+1} \\ 0 & A^{m+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

la propriété est vraie au rang $m+1$

$$\text{Alors } \forall m \in \mathbb{N}, \quad B^m = \begin{pmatrix} A^m & mA^m \\ 0 & A^m \end{pmatrix}$$

2) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$

On a n tel P que

$$P = \sum_{m=0}^n a_m X^m$$

Alors $P(B) = \sum_{m=0}^n a_m B^m$

$$P(B) = \sum_{m=0}^n a_m \begin{pmatrix} A^m & mA^m \\ 0 & A^m \end{pmatrix}$$

$$P(B) = \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^n a_m A^m & \sum_{m=0}^n a_m mA^m \\ 0 & \sum_{m=0}^n a_m A^m \end{pmatrix}$$

$$P(B) = \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^n a_m A^m & \left(\sum_{m=1}^n a_m mA^{m-1} \right) A \\ 0 & \sum_{m=0}^n a_m A^m \end{pmatrix}$$

+ prudent !

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)A \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

3) Si B est diagonalisable

Soit Q un polynôme annulateur de B scindé simple

En utilisant la formule de la 2)

$$Q(B) = \begin{pmatrix} Q(A) & Q'(A)A \\ 0 & Q(A) \end{pmatrix} = 0$$

Alors $Q(A) = 0$

donc A diagonalisable

4) ($\Leftarrow$) Si $A = 0_n$

Alors $B = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$

, donc B est diagonalisable

($\Rightarrow$)

Si B diagonalisable alors d'après 3)
 A est diagonalisable

But : 0 est la seule valeur propre

Soit Q scindé à racines simples annulant B
Alors Q et XQ' annulent A

Comme Q est scindé à racines simples,
alors $Q \wedge Q' = 1$

Q devient P ? Si de plus si 0 n'est pas racine de Q
alors $Q \wedge XQ' = 1$ (car $\begin{cases} Q \wedge X = 1 \\ Q \wedge Q' = 1 \end{cases}$)

D'après le théorème de Bézout, on a $U, V \in \mathbb{K}[X]$
tel que $UP + VXQ' = 1$
en évaluant en A on obtient : $0_n = I_n$, faux

Donc 0 racine de tout polynôme annulateur de B
donc valeur propre de B

Alors avec un polynôme annulateur scindé simple,

On a $P \wedge XP' = X$

Alors, on a $U, V \in \mathbb{K}[X]$

tel que $PV + XP'V = X$

et en évaluant en A

$A = 0$