1) $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longrightarrow (2X+1)P - (X^2-1)P' \end{cases}$

$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(P) \in \mathbb{R}[X]$.

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(P+\lambda Q) = (2X+1)(P+\lambda Q) - (X^2-1)(P+\lambda Q)'$$
$$= (2X+1)P + \lambda(2X+1)Q - (X^2-1)(P'+\lambda Q')$$
$$= (2X+1)P - (X^2-1)P' + \lambda[(2X+1)Q - (X^2-1)Q']$$
$$= f(P) + \lambda f(Q)$$

donc $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

2) a) $\varphi : \begin{cases} P \longmapsto f(P) \\ \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \end{cases}$ ?

$\varphi$ est linéaire car $f$ est linéaire.

Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = aX^2 + bX + c$.

$$\varphi(P) = f(P) = (2X+1)(aX^2+bX+c) - (X^2-1)(2aX+b)$$
$$= \cancel{2aX^3} + 2bX^2 + 2cX + aX^2 + bX + c - \cancel{2aX^3} - bX^2 + 2aX + b$$
$$= (a+b)X^2 + (2a+b+2c)X + b + c$$

donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

Donc $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) b) La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$. De plus, on a :

$\varphi(1) = 2X+1$

$\varphi(X) = (2X+1)X - X^2 + 1 = X^2 + X + 1$

$\varphi(X^2) = (2X+1)X^2 - (X^2-1)2X = X^2 + 2X$

donc $Mat_{\mathcal{B}_c}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

---

3)a) Si $Q$ est un vecteur propre de $f$ (associé à la valeur propre $\lambda$), alors $f(Q) = \lambda Q$ c'est-à-dire $(2X+1)Q - (X^2-1)Q' = \lambda Q$.

Or si $Q' = 0$, on a $(2X+1-\lambda)Q = 0$

Or $2X+1-\lambda$ est un polynôme non nul et $Q \neq 0$ car c'est un vecteur propre.

Donc $Q' \neq 0$.

Si on pose $n = \deg Q$. On peut écrire $Q = a_n X^n + R$ avec $a_n \neq 0$ et $\deg R \leqslant n-1$.

En regardant seulement le coefficient de degré $n+1$, qui doit être nul, dans l'équation $(2X+1)Q - (X^2-1)Q' = \lambda Q$, on obtient :

$2a_n - n a_n = 0$ donc $\underline{n = 2}$ (car $a_n \neq 0$)

Donc $Q \in \mathbb{R}_2[X]$.

---

3)b) Les éléments propres de $f$ vérifient $f(Q) = \lambda Q$ et comme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, ils vérifient également $\varphi(Q) = \lambda Q$.

Ainsi les valeurs propres de $f$ sont exactement les valeurs propres de $\varphi$.

Si on pose $A = Mat_{\mathcal{B}_c}(\varphi)$,

on a $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ -2 & X-1 & -2 \\ 0 & -1 & X-1 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{3} L_i}{=} \begin{vmatrix} X-3 & X-3 & X-3 \\ -2 & X-1 & -2 \\ 0 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$

$= (X-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & X-1 & -2 \\ 0 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$ puis on développe par rapport à la 1ère colonne

$= (X-3) \begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} + 2(X-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix}$

donc $\chi_A = (X-3)\left[(X-1)^2 - 2 + 2(X-1) + 2\right]$

$= (X-3)(X-1)(X+1)$

Donc $Sp(\varphi) = Sp(f) = \{-1\,;\,1\,;\,3\}$.

- $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ On remarque que $C_1 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_1(A)$.

Or $rg(A - I_3) = 2$. Donc $\dim E_1(A) = 1$. Donc $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

- $A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a $C_1 - 2C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{-1}(A)$.

De même que précédemment, $E_{-1}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ~~don~~. On a $C_1 + 2C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De même, $E_3(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.