50) Par l'absurde, montrons qu'il n'existe pas de polynôme annulateur de A non nul de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ non nul annulant A.

$P(A) = 0$. $\exists (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tq

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k = a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_0 I_n = 0$$

$(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ forme une famille libre

donc $(a_{n-1}, \dots, a_0) = (0, \dots, 0)$

donc P est le polynôme nul. Faux

Par l'absurde, il n'existe pas de polynôme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ non nul annulateur de A.

Comme $A^n = I_n$ on a $X^n - 1 = \mu_A(X)$ polynôme annulateur de A. $\deg \mu_A = n > n-1$.

μ_A est de plus petit degré comme polynôme annulateur de A et est unitaire : c'est le polynôme minimal de A.

De plus, $\mu_A(X) = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{i\frac{2k\pi}{n}})$ est scindé simple dans $\mathbb{C}$.

$$S_{\mu_A} = \{\lambda_k, k \in [\![0, n-1]\!]\} = \mathbb{U}_1$$

A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et possède n valeurs propres distinctes :

$$\boxed{\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0}$$