

Exercice 43

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_A = X^3$ Est-ce bien utile ?

A possède une seule valeur propre

donc soit $A = 0_3$ soit A non diagonalisable

donc A non diagonalisable

2) Si on a $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tel que $B^2 = A$

alors $A^3 = B^6 = 0_3$ car A nilpotente

donc B nilpotente

donc $\chi_B = X^3$ Intérêt ?

Puis B nilpotente dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

donc $\exists n \in \{1, 2, 3\}$ tel que $B^n = 0_3$

i) $n=1$, alors $B = 0_3$ contradiction

ii) $n=2$, alors $B^2 = A = 0_3$ contradiction

iii) $n=3$, alors $B^3 = 0_3$

donc $AB = 0_3$

donc $AB^2 = A^2 = 0_3$ contradiction

donc $\nexists B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tel que $B^2 = A$

$$3) \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C^3 = 0_3$$

donc C est nilpotente donc C est semblable à A

A justifier !! (Trouver une base.)