Q4

1. Soit $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ avec f bijective

<u>But</u> : $\chi_{f\circ g} = \chi_{g\circ f}$

Soit $\lambda \in E$, ???

$$\chi_{f\circ g}(\lambda) = \det(\lambda id_E - f\circ g)$$
$$= \det(\lambda f\circ f^{-1} - f\circ g)$$
$$= \det(f\circ(\lambda f^{-1} - g))$$
$$= \det(f)\det(\lambda f^{-1} - g)$$
$$= \det(\lambda f^{-1} - g)\det(f)$$
$$= \det((\lambda f^{-1} - g)\circ f)$$
$$= \det(\lambda id_E - g\circ f)$$

donc $\boxed{\chi_{f\circ g} = \chi_{g\circ f}}$

Autre méthode :

$f\circ g = f\circ(g\circ f)\circ f^{-1}$

2. Soit $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$

avec f, g bijectives

et $f \circ g$ diagonalisable

<u>But</u> : $g \circ f$ diagonalisable.

idem : $f \circ g = f \circ (g \circ f) \circ f^{-1}$

donc les matrices dans une base qcq sont semblables.

* f et g sont des isomorphismes donc

$$\begin{cases} \dim(g(E_\lambda(f \circ g))) = \dim(E_\lambda(f \circ g)) \\ \dim(f(E_\lambda(g \circ f))) = \dim(E_\lambda(g \circ f)) \end{cases} \quad (1)$$

* de plus, si $x \in E_\lambda(f \circ g)$ tel que $f \circ g(x) = \lambda x$

alors $g(f(g(x))) = \lambda g(x)$

donc $g(x) \in E_\lambda(g \circ f)$

donc $g(E_\lambda(f \circ g)) \subset E_\lambda(g \circ f)$

et par symétrie $f(E_\lambda(g \circ f)) \subset E_\lambda(f \circ g)$

on en déduit

$$\begin{cases} \dim(g(E_\lambda(f \circ g))) \leq \dim(E_\lambda(g \circ f)) \\ \dim(f(E_\lambda(g \circ f))) \leq \dim(E_\lambda(f \circ g)) \end{cases} \quad (2)$$

* par (1) et (2) on obtient : $\dim(E_\lambda(f \circ g)) = \dim(E_\lambda(g \circ f))$ (3)

Or, $f \circ g$ diagonalisable

donc, on a $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in E_\lambda(f \circ g)$

tels que $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(f \circ g)) = \dim(E)$

donc, d'après (3), avec $\lambda_1', \dots, \lambda_k'$

$$\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i'}(g \circ f)) = \dim(E)$$

donc $\boxed{g \circ f \text{ diagonalisable}}$

3. Soit $x \neq 0_E$, $\lambda \in Sp(f \circ g)$
tel que $f \circ g(x) = \lambda x$

[redacted],

alors $g \circ f(g(x)) = \lambda g(x)$

avec $g(x) \neq 0_E$ car $\begin{cases} f(g(x)) \neq 0_E \\ f(0_E) = 0_E \end{cases}$

donc $\boxed{\lambda \text{ valeur propre de } g \circ f}$

---

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

on a $\chi_A = \chi_B = (X-1)^2$

Or A et B ne sont pas la matrice identité

donc A et B ne sont pas diagonalisable

De plus, $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

avec $\chi_{AB} = X^2 - tr(AB)X + (-1)^2 \det(AB)$

$= X^2 - 4X + 1$

et $\Delta = 12 > 0$

donc χ_{AB} possède 2 racines différentes

donc AB possède 2 valeurs propres différentes en dimension 2

donc $\boxed{AB \text{ diagonalisable}}$.