Exercice 4 :

1) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_{2m}[X]$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ avec a et b racines d'ordre m de P.

Montrons par récurrence $\mathcal{H}_k$: " $P^{(k)}$ admet k racines distinctes dans $]a,b[$ ", pour $k \in [\![1, m]\!]$.

- Si $k = 1$:

  On a $P(a) = P(b) = 0$. De plus, P est dérivable sur $]a,b[$ et continue sur $[a,b]$.

  Par le théorème de Rolle, $\exists c^{(1)}_1 \in]a,b[$ tel que $P'(c^{(1)}_1) = 0$.

  Donc P' admet une racine dans $]a,b[$, d'où $\mathcal{H}_1$.

- Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$ tel que nous avons $\mathcal{H}_k$.

  Donc on a $a < c^{(k)}_1 < \dots < c^{(k)}_k < b$ tels que $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $P^{(k)}(c^{(k)}_i) = 0$

  Notons $a = c^{(k)}_0$ et $b = c^{(k)}_{k+1}$.

  a et b sont racines d'ordre $m > k$ de P, donc $P^{(k)}(a) = P^{(k)}(b) = 0$.

  De plus, pour $i \in [\![0;k]\!]$, $P^{(k)}$ est continue sur $[c^{(k)}_i ; c^{(k)}_{i+1}]$ et dérivable sur $]c^{(k)}_i, c^{(k)}_{i+1}[$.

  Donc par le théorème de Rolle, $\exists c^{(k+1)}_{i+1} \in]c^{(k)}_i, c^{(k)}_{i+1}[$ tel que $P^{(k+1)}(c^{(k+1)}_{i+1}) = 0$

  On a alors $a < c^{(k+1)}_1 < \dots < c^{(k+1)}_{k+1} < b$, avec $\forall i \in [\![1, k+1]\!]$, $P^{(k+1)}(c^{(k+1)}_i) = 0$.

  Donc $P^{(k+1)}$ admet $k+1$ racines distinctes dans $]a;b[$, d'où $\mathcal{H}_{k+1}$.

- Par récurrence, $\forall k \in [\![1, m]\!]$, $P^{(k)}$ admet k racines ~~simples~~ distinctes dans $]a,b[$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $P = (X^2-1)^n$ et $Q_n = ((X^2-1)^n)^{(n)}$

$P = (X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$

Ainsi, 1 et -1 sont racines d'ordre n de P.

Par la première question, Q_n admet n racines distinctes dans $]-1;1[$.

De plus, P est de degré $2n$, donc Q_n est de degré $2n - n = n$.

Ainsi, les n racines que Q_n dans $]-1;1[$ sont nécessairement simples