(27)

Soit $x \in E$

$(u+v)(x) = x$

$u(x) + v(x) = x$

Or $u(x) \in \mathrm{Im}\, u$, $v(x) \in \mathrm{Im}\, v$

Donc $\boxed{E = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v}$

On a $\mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v$ : en effet,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(u+v) &= \{ u(x) + v(x) , x \in E \} \\ &\subset \{ u(x) + v(x'), (x,x') \in E^2 \} \\ &= \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $\boxed{\mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v}$ en passant aux dimensions. pas seulement

Or $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}(id_E) = E$ et

$\boxed{\mathrm{rg}(u+v) = n}$

Ainsi $\begin{cases} n \leq \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v \\ n \geq \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v \end{cases}$
et

D'où $\boxed{\mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v = n}$ et $\boxed{E = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Im}\, v}$

<u>$u$ et $v$ projecteurs :</u> <u>On montre $u$ projecteur</u>

<u>Théorème du rang :</u>

$$n = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u$$

et $\underline{E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v}$

donc

$$n = \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$$

Ainsi $\boxed{\dim \operatorname{Ker} u = \operatorname{rg} v}$

puis, <u>Soit $x \in \operatorname{Ker} u$</u>

$$x = u(x) + v(x) = v(x)$$

donc $x \in \operatorname{Im} v$ <u>ie $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Im} v$</u>

$\boxed{\text{puis } \operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} v}$

Soit $x \in E$

$x = u(x) + v(x)$ donc $u(x) = x - v(x)$

$$\boxed{u \circ u(x)} = u(x) - u(v(x))$$

$$= u(x) - 0$$

$$\boxed{= u(x)}$$

$\boxed{\text{Donc } u \text{ projecteur. De même pour } v.}$

Mieux : $v = id_E - u$ projection associée