208

1) Par définition de cette loi on a $X(\Omega) = [\![2 ; N^2+1]\!]$

On note pour $i \in \mathbb{N}$ X_i = "on obtient un nouvel entier au i^e tirage"

ressemble à une variable aléatoire

Soit $k \in X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(X_1 \cap \dots \cap X_{k-1})$$

avec la formule des probabilités composées.

$$= \mathbb{P}(X_1) . \mathbb{P}(X_2 | X_1) \dots \mathbb{P}(X_{k-1} | X_1 \cap \dots \cap X_{k-2})$$

car la probabilité d'obtenir un entier parmi $\{1, \dots, N^2\}$ est uniforme.

$$= \frac{N^2}{N^2} \times \frac{N^2-1}{N^2} \times \dots \times \frac{N^2-k+2}{N^2}$$

$$= \frac{N^2 \dots (N^2-k+2)}{N^{2(k-1)}}$$

ensuite : ~~$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}((X \geq k) \sqcup (X < k+1))$~~

~~$= \mathbb{P}$~~

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k)} = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)$$

$$= \frac{N^2 \dots (N^2-k+2)}{N^{2(k-1)}} - \frac{N^2 \dots (N^2-k+1)}{N^{2(k)}}$$

$$= \frac{N^2 \dots (N^2-k+2)}{N^{2(k-1)}} \underbrace{\left(1 - \frac{N^2-k+1}{N^2} \right)}_{= \frac{k-1}{N^2}}$$

$$\boxed{= \frac{N^2 \dots (N^2-k+2)}{N^{2k}} . (k-1)}$$

Son espérance vaut ainsi : (elle est bien définie car $X(\Omega)$ est fini)

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=2}^{N^2+1} \mathbb{P}(X=k) . k$$

Non demandé

$$= \sum_{k=2}^{N^2+1} \frac{N^2 \dots (N^2-k+2)}{N^{2k}} (k-1) . k$$