

Exercice 205

1)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} P(X=i, Y=j) &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} \lambda \binom{n}{i-1} \binom{m}{j-1} = 1 \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} = 1 \\ &= \lambda 2^n 2^m = 1\end{aligned}$$

$$\text{donc } \lambda = \frac{1}{4^n}$$

2)

$X(\omega) = [1, m+1]$
 $\forall j \in [1, m+1] (Y=j)$ est une SCE

d'après FPT

$$P(X=i) = \sum_{j \in Y(\omega)} P((X=i) \cap (Y=j))$$

$$= \frac{1}{4^n} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{n}{i-1} \binom{m}{j-1}$$

$$= \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} 2^m = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1}$$

Par symétrie Y suit la même loi.

$$3) \text{ under } P(X=i), P(Y=j) = \frac{1}{4^m} \binom{m}{i-1} \binom{m}{j-1}$$

4)

$$Z(n) = [0, n]$$

$$\forall k \in Z(n)$$

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= P(X=k+1) \\ &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

$$Z \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Or } E(Z) = \frac{n}{2}$$

$$E(X) = E(Z) + 1$$

$$\text{hence } E(X) = \frac{n}{2} + 1$$

$$V(Z) = \frac{n}{4} = V(X)$$

5)

$$B^2 = C$$

$$\begin{aligned}
 \text{avec } c_{ij} &= \sum_{k=1}^{m+1} b_{ik} b_{kj} \\
 &= \sum_{k=1}^{m+1} P(Y=i | X=k) P(Y=k | X=j) \\
 &= P(Y=i) \sum_{k=1}^{m+1} P(Y=k) \quad \text{par indépendance} \\
 &= P(Y=i) \\
 &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{P(Y=i, X=k)}{P(X=k)} \cdot \frac{P(Y=k, X=j)}{P(X=j)} \\
 &= \sum_{k=1}^{m+1} \left(\frac{2^m \binom{m}{i-1} \binom{m}{k-1}}{4^m \binom{m}{k-1}} \right) = \frac{2^m}{4^m} \frac{\binom{m}{i-1} \binom{m}{j-1}}{\binom{m}{j-1}} \\
 &= \frac{1}{4^m} \binom{m}{i-1} \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} \\
 &= \frac{1}{2^m} \binom{m}{i-1}
 \end{aligned}$$

donc $B^2 = C$

avec $C = (c_{ij})_{i,j \in [1, m+1]}$

$$= \frac{1}{2^m} \binom{m}{i-1}$$

?! ?

donc $B^2 = B$

6)

$$B^2 = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} \binom{n}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{n} & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

rg $B^2 = 1$ donc dimker ???

$B^2 - B = 0$
 donc $P: x^2 - x$ est un polynôme annulateur
 $= x(x-1)$

PARMI

donc les valeurs propres sont 0 et 1

$B^2 = B$
 donc B est la matrice d'une projection donc elle est diagonalisable
 et on a

$$\text{Im } B \oplus \text{Ker } B = \mathbb{R}^{n+1}$$

rg $B = 1$ or $\text{Im } B = E_1(B)$

donc $\dim E_1(B) = 1$

donc $\dim E_0(B) = n$ ✓

L'indépendance de x et y rend l'étude de la matrice B
 un peu étrange... Mais je valide.