Banque Oral N° 201

1)

- $$\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_1(k) = 1$$

donc

$$1 = \sum_{k=1}^{n} p q^{k-1} + \lambda$$

$$= p\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) + \lambda = 1 - q^n + \lambda$$

donc $\boxed{\lambda = q^n}$

On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = x \frac{1-x^n}{1-x}$

plus facile à dériver en partant de 0

En dérivant :

$$\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x} + x\left(\frac{-nx^{n-1} + nx^n + 1 - x^n}{(1-x)^2}\right)$$

$$= \frac{(1-x^n)(1-x) - nx^n + nx^{n+1} + x - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1 - x^n - nx^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

donc

$$1 = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_2(k) = \sum_{k=2}^{n} (k-1) p^2 q^{k-2} + \mu$$

$$= p^2 \sum_{k=1}^{n-1} k q^{k-1} + \mu$$

$$= \cancel{p^2}\left(\frac{1 - q^n - (n) q^{n-1} + (n-1) q^{n\cancel{+1}}}{\cancel{(1-q)^2}}\right) + \mu$$

donc $1 = 1 - q^n - \color{red}{(n-1)}q^{n-1} + \color{red}{(n-1)}q^{n\cancel{+1}} + \mu$

donc $\mu = q^n + \color{red}{(n-1)}q^{n-1} - \color{red}{(n-1)}q^{n\cancel{+1}}$

$$\boxed{\mu = \cancel{q^n(1+n-nq)}} \quad \color{red}{q^{n-1}\big((2-n)q + n - 1\big)}$$

2a)

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$$

$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}_2$

avec

$$q = \frac{a}{a+b} \qquad p = \frac{b}{a+b}$$

2b)

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(X=k)\,k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p\,k\,q^{k-1} + (n+1)\,\lambda$$

$$= p\,\frac{(1 - q^n - nq^n + nq^{n+1})}{p^2} + (n+1)q^n$$

$$= \frac{1 - q^n - nq^n + nq^{n+1} + (1-q)(n+1)q^n}{1-q}$$

$$= \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

Soit

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1 - \left(\frac{a}{a+b}\right)^{n+1}}{\frac{b}{a+b}} = \boxed{\frac{(a+b)^{n+1} - a^{n+1}}{b\,(a+b)^n}}$$