Exercice 196

1. On applique le théorème de Fubini :
   — Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $|x^{k\ell}| = |x|^k|x|^\ell$. Comme $|x| < 1$, la somme géométrique $\sum_{\ell=1} |x|^k|x|^\ell$ converge vers $\dfrac{|x|^k}{1-|x|^k}$ et $(x^{k\ell})_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ est sommable.
   — $\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \dfrac{|x|^k}{1-|x|^k} \leq |x|^k$ qui est terme général de série géométrique convergente donc par comparaison, $\sum_{k=0} \dfrac{|x|^k}{1-|x|^k}$ converge.
   — Donc $(x_{k\ell})_{(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2} x^{k\ell} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k}$.
2. On applique le théorème de sommation par paquets :
   — On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \{(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2 : k\ell = n\}$ qui donne bien $(\mathbb{N}^*)^2 = \displaystyle\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$.
   — On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |I_n| = d(n)$.
   En effet, si $n \in \mathbb{N}^*$, pour former un couple de I_n, il faut déjà choisir un k diviseur de n puis lorsque k est fixé, il n'y a qu'un seul choix pour ℓ.
   De plus, $\displaystyle\sum_{(k,\ell)\in I_n} x^{k\ell} = \sum_{(k,\ell)\in I_n} x^n = d(n)x^n$.
   — D'après la question précédente, $(x_{k\ell})_{(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
   — Donc $\sum_{n=1} d(n)x^n$ converge et $\displaystyle\sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2} x^{k\ell} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$.

   Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$.