Exercice 176 :

1) Soit $f \in F$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, donc :

$$f(x) = \frac{f(x+y)+f(x-y)}{2f(y)} \text{ et } f(y) = \frac{f(x+y)+f(x-y)}{2f(x)} \text{ car } \begin{cases} f(x) \neq 0 \\ f(y) \neq 0 \end{cases}$$

De plus f est deux fois dérivable, dès lors :

$$f''(x) = \frac{f''(x+y)+f''(x-y)}{2f(y)} \text{ et } f''(y) = \frac{f''(x+y)+f''(x-y)}{2f(x)}$$

Ainsi, $f''(x)f(y) = f''(y)f(x)$, soit $\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{f''(y)}{f(y)}$

Donc $\frac{f''}{f}$ est constante, on a $k' \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f''(x)}{f(x)} = k'$

Donc on a $k = -k' \in \mathbb{R}$ tel que $\underline{\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + kf(x) = 0}$.

2) Raisonnons par analyse-synthèse.

• Soit $f \in F$. Par la question 1, $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $f'' + kf = 0$.

On remarque que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y) = 2f(y)f(x) = f(x+y)+f(y-x)$.

Donc en prenant $y = 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$, donc f est paire.

$\underline{1^{\text{er}} \text{ cas}}$: $k > 0$

$\exists A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto A\cos(\sqrt{k}x + B)$

Or $k \neq 0$, donc f s'annule en $x = \frac{\frac{\pi}{2} - B}{\sqrt{k}}$, ce qui est impossible.

$\underline{2^{\text{ième}} \text{ cas}}$: $k = 0$

$\exists A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto Ax + B$

Or si $A \neq 0$, $f\left(-\frac{B}{A}\right) = 0$, ce qui est impossible. Donc $f : x \mapsto B$.

De plus, $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$

Donc $2B = 2B^2$. Or $f \neq 0$, donc $B \neq 0$, donc $B = 1$ nécessairement.

$\underline{3^{\text{ième}} \text{ cas}}$: $k < 0$

$\exists A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto A\,\text{ch}(\sqrt{-k}\,x) + B\,\text{sh}(\sqrt{-k}\,x)$.

Or f est paire, donc $f : x \mapsto A\,\text{ch}(\sqrt{-k}\,x)$, avec $A \neq 0$ car $f \neq 0$.

De plus, $f(0) + f(0) = 2f(0)^2$. Or $f(0) \neq 0$, donc $f(0) = 1$, donc $A = 1$.

~~Donc nécessairement, f :~~

Donc $\boxed{\text{si } f \in F,\ \exists k \leq 0 \text{ tel que } f : x \mapsto ch(\sqrt{-k}\,x)}$

- Réciproquement, si $f : x \mapsto ch(\sqrt{-k}\,x)$ avec $k \leq 0$.

  f est deux fois dérivable et f ne s'annule pas.

  Soit $x, y \in \mathbb{R}$:

  On a $ch(\sqrt{-k}(x+y)) + ch(\sqrt{-k}(x-y)) = ch(\sqrt{-k}x)\,ch(\sqrt{-k}y) + sh(\sqrt{-k}x)\,sh(\sqrt{-k}y)$

  $+ ch(\sqrt{-k}x)\,ch(\sqrt{-k}y) - sh(\sqrt{-k}x)\,sh(\sqrt{-k}y)$

(formules de trigo H hors programme ...)

  $= 2\,ch(\sqrt{-k}x)\,ch(\sqrt{-k}y)$

  Donc $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

  Donc $\underline{f \in F}$.

Ainsi, $\boxed{F = \{x \mapsto ch(\sqrt{-k}\,x) \mid k \leq 0\}} = \{x \mapsto ch(\alpha x),\ \alpha \in \mathbb{R}^+\}$