Exercice 175

On note $Z = \{x \in [a,b] \mid f(x) = 0\}$. Supposons que Z est infini et montrons que l'on arrive à une contradiction.

Soit $(x_n) \in Z^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments distincts de Z.

Z est inclus dans le segment $[a,b]$ donc par théorème de Bolzano-Weierstrass, on a $x \in [a,b]$ et une extractrice φ tels que $x_{\varphi(n)} \to x$.

f est C^2 comme solution de (E).

$f(x_n) = 0 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x)$ par continuité de f donc $f(x) = 0$ par unicité de la limite.

À appliquer plutôt à $x_{\varphi(n)}$ et $x_{\varphi(n+1)}$ pour avoir $x'_n \to x$

Si $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = f(x_{n+1}) = 0$, f est continue sur $[x_n, x_{n+1}]$ (ou $[x_{n+1}, x_n]$) et dérivable sur $]x_n, x_{n+1}[$ donc par théorème de Rolle, on a $x'_n \in]x_n, x_{n+1}[$ tel que $f'(x'_n) = 0$. En faisant tendre $n \to +\infty$, $x'_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$.

$f'(x'_n) = 0 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $f'(x'_n) \underset{n\to+\infty}{\to} f'(x)$ par continuité de f' donc $f'(x) = 0$ par unicité de la limite.

Donc f est solution du problème de Cauchy :

- $\forall t \in [a,b], y''(t) + q(t)y(t) = 0$
- $y(x) = 0$
- $y'(x) = 0$

L'application nulle l'est aussi donc par théorème de Cauchy linéaire, f est nulle sur $[a,b]$ ce qui est faux donc Z est fini.