

Banque Oral - N° 167

1) Soit $f_n: \mathbb{I}0,1\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^-$
$$x \mapsto x^n \ln(1-x)$$

f_n est continue sur $\mathbb{I}0,1\mathbb{I}$ et négative.
Soit $x \in \mathbb{I}0,1\mathbb{I}$

$$|f_n(x)| = |x^n \ln(1-x)| = -x^n \ln(1-x) = o_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(1-x)^{1/2}} \right)$$

$$\text{car } -(1-x)^{1/2} x^n \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -(1-x)^{1/2} \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 1}{\rightarrow} 0$$

Par croissance comparée

On $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$ est intégrable sur $\mathbb{I}0,1\mathbb{I}$ par

critère de Riemann, donc par comparaison des fonctions positives :

$x \mapsto f_n(x)$ est intégrable sur $\mathbb{I}0,1\mathbb{I}$

2)
On utilise le théorème de convergence dominée
 H_1 - $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto f_n(x)$ continue sur $\mathbb{I}0,1\mathbb{I}$
 H_2 - Soit $x \in \mathbb{I}0,1\mathbb{I}$

$$f_n(x) = x^n \ln(1-x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc $f_n \xrightarrow{cs} \tilde{0}$ qui est continue

H_3 - Hypothèse de domination
Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{I}0,1\mathbb{I}$

$$\|f_n(x)\| \leq \ln(1-x) = \phi(x) \quad \text{indépendant de } n$$

ϕ est continue sur $[0, 1[$

ϕ est intégrable sur $[0, 1[$ car:

$$\|\ln(1-x)\| = o\left(\frac{1}{(1-x)^{1/2}}\right)$$

et $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$ est intégrable, donc par

comparaison des fonctions positive, ϕ est intégrable sur $[0, 1[$.

donc $(a_n)_{n \geq 0}$ converge et

$$a_n = \int_0^1 x^n \ln(1-x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 0 dx = 0 = L$$

3)

Raisonnons par l'absurde

Supposons que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge

$$\text{On a } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \ln(1-x) dx$$

Utilisons le théorème de convergence N_1

H_1 - La série $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge simplement sur $x \in [0, 1[$ et sa somme, $\frac{1}{1-x}$ est continue sur $[0, 1[$

H_2 - $x \mapsto f_n(x) = x^n \ln(1-x)$ est intégrable sur $[0, 1[$ (c'est la question 1)

$$\begin{aligned} H_3 - \text{la série } \sum_{n \geq 0} \int_0^1 |x^n \ln(1-x)| dx &= \sum_{n \geq 0} - \int_0^1 x^n \ln(1-x) dx \\ &= - \sum a_n \end{aligned}$$

converge car $\sum$ an converge

Par théorème, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est intégrable sur $[0,1[$

$$\text{On } \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \ln(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Donc $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1-x} dx$ converge

Changement de Variable

$$t = 1-x$$

$x \mapsto 1-x$ est bijective et $\mathcal{C}^1$

donc comme $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1-x} dx$ converge, on peut écrire

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1-x} dx = \int_1^0 - \frac{\ln(t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t} dt$$

de la forme $u' \times u$
se primitive en $\frac{1}{2} \ln^2 t$

Soit $\varepsilon > 0$

Proceedons à une intégration par parties

$$u(t) = \ln(t)$$

$$v(t) = \ln(t)$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$

$$u'(t) = \frac{1}{t}$$

$$v'(t) = \frac{1}{t}$$

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln(t)}{t} dt &= [\ln^2(t)]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln(t)}{t} dt \\ &= 0 - \ln^2(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln(t)}{t} dt \end{aligned}$$

donc

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln(t)}{t} dt = - \frac{\ln^2(\varepsilon)}{2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\infty$$

donc $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t} dt$ diverge. Contradiction!

Donc $\sum$ an diverge

4)

On cherche à intégrer $x \mapsto \ln(1-x)$

Par intégration par parties, u et v étant $\mathcal{C}^1$
 $u(x) = \ln(1-x)$ $u'(x) = -\frac{1}{1-x}$

$$v(x) = (x-1) \quad v'(x) = 1$$

$$\int_0^1 x \ln(1-x) dx = \underbrace{\int_0^1 (x-1) \ln(1-x) dx}_{= (x-1) \ln(1-x) - x} + \int_0^1 \frac{x-1}{1-x} dx$$

Par intégration par parties, u et v étant $\mathcal{C}^1$

$$u(x) = x^n \quad u'(x) = nx^{n-1}$$

$$v'(x) = \ln(1-x) \quad v(x) = (x-1) \ln(1-x) - x$$

Soit $A \in [0, 1[$

$$\int_0^A x^n \ln(1-x) dx$$

$$= \left[((x-1) \ln(1-x) - x) x^n \right]_0^A - \int_0^A ((x-1) \ln(1-x) - x) nx^{n-1} dx$$

$$= ((A-1) \ln(1-A) - A) A^n - \left[\int_0^A n \ln(1-x) x^n dx - \int_0^A n \ln(1-x) x^{n-1} dx - \int_0^A n x^n dx \right]$$

$$= (A-1) \ln(1-A) A^n - A^{n+1} - n \int_0^A x^n \ln(1-x) dx$$

$$+ n \int_0^A x^{n-1} \ln(1-x) dx + n \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^A$$

$$A \rightarrow 1$$

$$a_n = -1 - n a_n + n a_{n-1} + \frac{1}{n+1}$$

$$(n+1)a_n - n a_{n-1} = \frac{1 - (n+1)}{n+1} = -\frac{1}{n+1}$$

5)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Avec la question 4:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)a_n - 1}{(n+2)^2} \neq 0?$$

Si $x \neq 0$

$$\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \left| \frac{(n+1)(n+2)a_n - 1}{(n+2)^2} x \right|$$

$$\sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)^2} \frac{a_n}{a_n} |x|$$

$$\sim_{n \rightarrow +\infty} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$$

donc par critère de d'Alembert

$|x| < 1$, $\sum a_n x^n$ converge

$|x| > 1$, $\sum a_n x^n$ diverge

donc $\boxed{R=1}$

Soit $x \in]-1, 1[$

On suppose l'intervention série - intégrale liée

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 t^n \ln(1-t) dt \right) x^n \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (xt)^n \ln(1-t) \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1-xt} dt \end{aligned}$$

Par théorème de convergence M, sur $g_n: t \mapsto (xt)^n \ln(1-t)$
 $M_t = \forall t \in [0, 1[$

$$\sum g_n(t) = \ln(1-t) \sum (xt)^n \text{ converge}$$

car $xt \in]-1, 1[$

H₂ - $\forall n \in \mathbb{N}, \quad r \mapsto g_n(r)$ est intégrable
avec la question 1

H₃ -

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |r^n \ln(1-r) x^n dr| = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^n$$

converge sur $] -1, 1[$.

donc :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{\ln(1-r)}{1-(xr)} dr}$$