

160) Soit $f: t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t=0 \\ t^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) & \text{si } t \in]0,1] \end{cases}$

On vérifie tout d'abord que f est bien dérivable sur $[0,1]$, par opérations elle l'est sur $]0,1]$ telle que pour $t \in]0,1]$ $f'(t) = 2t \cdot \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) - \frac{2}{t} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right)$

et $\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{1}{t} \times t^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) = \underbrace{t \cdot \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}_{\text{borné}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 = f'(0)$

au final f est bien dérivable sur $[0,1]$

telle que $f': t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t=0 \\ 2t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) - \frac{2}{t} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) & \text{si } t \in]0,1] \end{cases}$

Soit $\alpha \in]0,1]$, ^{Heij!} On a $\int_{\alpha}^1 f'(t) dt = f(1) - f(\alpha) \rightarrow f(1) - f(0)$ directement...

$\int_{\alpha}^1 f'(t) dt = \int_{\alpha}^1 \left(2t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) - \frac{2}{t} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) \right) dt$

d'une part $t \mapsto 2t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $]0,1]$ telle que $\underbrace{2t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}_{\text{borné}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$

Cette fonction est donc prolongeable par C^{∞} et ainsi

$\int_{\alpha}^1 2t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ converge (*)

ensuite $-2 \int_{\alpha}^1 \frac{1}{t} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_{\alpha}^1 \underbrace{t^2}_{\downarrow} \times \underbrace{\frac{-2}{t^3}}_{\uparrow} \cdot \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

on fait une IPP avec

$\begin{cases} t \mapsto t^2 \\ t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \end{cases}$

$= \left[t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \right]_{\alpha}^1 - 2 \int_{\alpha}^1 t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, 1]$ $= 1 \sin(1) - \underbrace{\alpha^2 \sin\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \text{ car} \\ \text{le sinus} \\ \text{est borné}}} - 2 \underbrace{\int_{\alpha}^1 t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt}_{\substack{\text{bien défini avec (*)} \\ \text{lorsque } \alpha \rightarrow 0}}$

ainsi $\int_0^1 f'(t) dt$ converge

2) On veut ~~montrer~~ ^{étudier} l'intégrabilité de $f': t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t=0 \\ 2t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) & \text{si } t \in]0,1] \\ -\frac{2}{t} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) & \text{si } t \in]0,1] \end{cases}$ sur $]0,1]$.

Tout d'abord, on a $|2t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)| \leq 2|t|$ (c'est un segment)
où $2|t|$ est intégrable sur $]0,1]$ car y est continue.
donc $t \mapsto 2t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est intégrable sur $]0,1]$ par
comparaison des fonctions positives. (prolongeable par $(t^2) \dots$)

Ainsi l'intégrabilité de f' se résume à étudier celle de
 $t \mapsto -\frac{2}{t} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Or $t^2 \cdot \left| -\frac{2}{t} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) \right| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ par croissance
comparée.

donc $\frac{1}{t^2} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} \left(\left| \frac{2}{t} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) \right| \right)$ où $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est non-intégrable
sur $]0,1]$ comme fonction
de Riemann ($2 > 1$)

ainsi par comparaison des fonctions positives,

$t \mapsto -\frac{2}{t} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est non-intégrable sur $]0,1]$.

Ainsi

f' est non-intégrable sur $]0,1]$.