

150

1) Soit  $f: t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$  qui est continue, négative sur  $]0, \frac{1}{2}]$ .

de plus  $\left| \frac{\ln(1-t)}{t} \right| \sim -\frac{\ln(1-t)}{t} \sim 1$   $t \rightarrow 0$

où  $t \mapsto 1$  est intégrable sur  $[0, \frac{1}{2}]$  car c'est continue et que c'est un segment.

(ou: prolongement par continuité)

ainsi par comparaison des fonctions positives,  $f$  est intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$

donc  $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t} dt$  converge.

Ensuite,

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_1^{1/2} \frac{\ln(u)}{1-u} (-du) = \int_{1/2}^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du.$$

On fait le changement de variable  $u = 1-t$   
 $du = -dt$

où  $\varphi: [0, 1/2] \rightarrow [1/2, 1]$   
 $t \mapsto 1-t$   
est  $\mathcal{C}^1$ , bijective.

donc le résultat souhaité.

2) On a:

$$\int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{1-t} dt = \int_{1/2}^1 \ln t \sum_{n=0}^{+\infty} t^n dt$$

Sous réserve de pouvoir inverser somme et intégrale.

avec une IPP

où  $\begin{cases} t \mapsto \ln t \\ t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1} \end{cases}$   
sont  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\frac{1}{2}, 1]$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{1/2}^1 \ln t \cdot t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \left[ \ln t \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 \frac{t^n}{n+1} dt \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - \left[ \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_{1/2}^1 \right) \end{aligned}$$



$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\ln 2}{2^{n+1}(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2} \right)$$

$$= \ln 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} + S$$

est bien définie  
d'après le développement  
en série entière  
de  $t \mapsto -\ln(1-t)$

est bien définie  
comme somme  
de Riemann  
( $2 > 1$ )  
(elle vaut  $\frac{\pi^2}{6}$ )

S est bien définie car  
 $\frac{1}{2^{n+1}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et  $\frac{1}{n^2}$  un terme  
positif de série convergente.

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } S &= \frac{\pi^2}{6} - \ln 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)^{n+1}}{n+1} + \int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{1-t} dt \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \ln 2 \times (-\ln(1-\frac{1}{2})) + \int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{1-t} dt \\ &= \frac{\pi^2}{6} - (\ln 2)^2 + \int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{1-t} dt \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{1-t} dt &= \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t} dt = - \int_0^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n} dt \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/2} \frac{t^{n-1}}{n} dt \end{aligned}$$

Sans réserve  
de pouvoir  
inverser somme  
et intégrale.

$$\begin{aligned} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{t^n}{n^2} \right]_0^{1/2} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} \end{aligned}$$

$$= -S$$

Ce qui nous permet d'aboutir à :

$$S = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}$$



On justifie les deux ensuite les deux inversions :

pour la première : Soit  $f_n : t \mapsto \ln t \cdot t^n$  définie pour  $n \in \mathbb{N}$

(H1)  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[\frac{1}{2}; 1[$  comme série géométrique vers  $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1-t}$  qui est bien continue par morceaux sur  $[\frac{1}{2}; 1[$ .

(H2)  $\forall n \in \mathbb{N}$   $f_n$  est continue sur  $[\frac{1}{2}; 1]$  (un segment) elle est donc intégrable sur  $[\frac{1}{2}; 1]$ .

(H3) la série  $\sum \int_{1/2}^1 |f_n|$  peut se réécrire :

$$\sum \left| \frac{\ln^2}{2^{n+1}(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2} \right| \text{ car :}$$

$$\left| \frac{\ln^2}{2^{n+1}(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2} \right| \leq \underbrace{\frac{\ln^2}{2^{n+1}(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2}}_{\text{Ces termes sont des termes positifs de série convergente comme montré précédemment}}$$

ainsi  $\sum \int_{1/2}^1 |f_n|$  converge.

par conséquent, l'inversion est justifiée.

pour la deuxième : Soit  $g_n : t \mapsto \frac{t^{n-1}}{n}$  définie pour  $n \in \mathbb{N}^*$

(H1)  $\sum g_n$  converge simplement sur  $]0, \frac{1}{2}]$  vers  $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$  qui est bien continue par morceaux sur  $]0, \frac{1}{2}]$ .

(H2)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$   $g_n : t \mapsto \frac{t^{n-1}}{n}$  est continue sur le segment  $]0, \frac{1}{2}]$ .

donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$   $g_n$  est intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$ .

(H3)  $\sum_{n \geq 1} \int_0^{1/2} |g_n|$  est la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n n^2}$  qui est bien convergente d'après une précédente explication.

par conséquent l'inversion est justifiée.