

Exercice 122:

Soit  $N \geq 2$ .

$$u_N = \ln\left(\frac{(2N-1)N}{(2N+1)(N-1)}\right) = \ln(2N-1) - \ln(2N+1) + \ln(N) - \ln(N-1)$$

On remarque un télescopage :

$$\sum_{n=2}^N u_n = \sum_{n=2}^N \ln(2n-1) - \sum_{n=2}^N \ln(2n+1) + \sum_{n=2}^N \ln(n) - \sum_{n=2}^N \ln(n-1)$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} \ln(2n+1) - \sum_{n=2}^N \ln(2n+1) + \sum_{n=2}^N \ln(n) - \sum_{n=1}^{N-1} \ln(n)$$

$$= \ln(3) - \ln(2N+1) + \ln(N)$$

$$= \ln(3) - \ln\left(2 + \frac{1}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Ainsi,  $\sum_{n \geq 2} u_n$  converge et  $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ .