115

1) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} - x_n = x_n f(x_n) - x_n$$
$$= x_n(f(x_n) - 1)$$

or $x_0 \in \mathbb{R}^+_*$ donc par récurrence, $(x_n)_{n\geq 0} \geq 0$ car $f > 0$

et $f' < 0$ donc f décroissante strictement
et $f(0) = 1$ donc
$\forall n \in \mathbb{N}, \ f(x_n) \leq 1$

d'où $x_{n+1} - x_n \leq 0$
donc $\boxed{(x_n) \text{ décroissante}}$

On a $x_n f(x_n) = x_{n-1} f(x_{n-1}) f(x_n)$
$$\underset{\text{par récurrence}}{=} x_0 \prod_{k=0}^{n} f(x_k)$$

$\forall k \in \mathbb{N},\ f(x_k) < 1$

Rien ne nous assure qu'un tel α existe bien...

~~Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall k \in \mathbb{N},\ f(x_k) \leq \alpha < 1$~~

Et même pire : comme $f(x_n) \xrightarrow[n]{} f(0) = 1$, il n'existe pas

dès lors $0 \leq x_n f(x_n) \leq x_0 \alpha \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

car $\alpha < 1$

Par monotonie, $x_n \to \ell$

puis $\ell = \ell f(\ell)$ par $c^{té}$

donc

$\ell = 0$ ou $f(\ell) = 1$

donc $\ell = 0$ par stricte monotonie

d'où $\boxed{x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$

~~2) Soit $n \in \mathbb{N}$~~

~~$0 \leq x_n = x_{n-1} f(x_{n-1}) \leq x_0 \alpha^n$ d'après 1)~~

~~or α^n est un terme positif de série convergente (géométrique avec $\alpha < 1$)~~

~~donc par comparaison $\boxed{\sum x_n \text{ converge}}$~~

Toujours pas de α ...

Mais $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = f(x_n) = \underbrace{f(0)}_{=1} + x_n f'(0) + o(x_n)$

donc $\ln(x_{n+1}) - \ln(x_n) = \ln(1 + \underbrace{x_n f'(0) + o(x_n)}_{\to 0})$

$\sim x_n f'(x_0) < 0$

TG de série télescopique divergente

donc $\boxed{\sum x_n \text{ diverge}}$