Préparation aux Oraux

1. Polynômes

1 Mines-Télécom 2019

Soit $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Démontrer que $X^n - 1$ divise $X^m - 1$ si et seulement si n divise m.

Variante : montrer que $X^{n\wedge m} - 1 = (X^n - 1) \wedge (X^m - 1)$.

2 Mines-Télécom 2019

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 2$, scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Démontrer que P' est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.
2. On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de P et $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ celles de P'. On pose $M = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ et $m = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k$.
   Comparer M et m.

3 Mines-Ponts 2018

Soit a, b et c les trois racines complexes du polynôme $P = X^3 + X^2 + 1$.

Résoudre le système (S) : $\begin{cases} x + ay + a^2z = a^4 \\ x + by + b^2z = b^4 \\ x + cy + c^2z = c^4 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$.

4 Mines-Télécom 2018

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_{2m}[X]$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On suppose que a et b sont racines d'ordre m de P. Montrer que pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $P^{(k)}$ admet k racines distinctes dans $]a, b[$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $Q_n(X) = \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.
   Quel est le degré de Q_n ? Montrer que Q_n admet n racines simples dans $]-1, 1[$.

5 CCINP 2017 Polynômes de Tchebychev

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de T_n.
2. Démontrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note
   $$E_n = \left\{P \in \mathbb{R}[X],\ (1 - X^2)\, P'' - XP' + n^2P = 0\right\}.$$
   a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Démontrer que si $P \in E_n$, alors $P = 0$ ou $\deg(P) = n$.
   b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \in E_n$.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathrm{Vect}(T_n)$.

6 Centrale - Polynômes de Tchebychev (suite)

Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{T_n}$.

7 Mines-Ponts 2017

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes

$(\mathcal{P}_1)$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$.

$(\mathcal{P}_2)$ Il existe $(A,B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$.

8 TPE 2017 – Théorème de Gauß-Lucas

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et $z_1, \dots, z_n$ les racines de P dans $\mathbb{C}$. L'ensemble :

$$\mathcal{C}_P = \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k \text{ avec } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \text{ tel que } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1\right\}$$

est appelé enveloppe convexe des racines de P.

Démontrer que toute racine complexe de P' appartient à $\mathcal{C}_P$.

9 Centrale 2019

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.
2. Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé, il en est de même de P'.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. On note $z_1, \dots, z_r$ ses racines. Montrer que les racines non réelles de P' sont dans
   $$\bigcup_{k=1}^{r} \left\{z \in \mathbb{C}, |z - \mathfrak{Re}(z_k)| \leqslant |\mathfrak{Im}(z_k)|\right\}.$$

10 Mines-Ponts

Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{X^{n-1}}{X^n - 1}$.

2. Algèbre générale

11 CCINP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(G,*)$ un groupe cyclique de cardinal n et a un générateur de $(G,*)$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $d = \mathrm{PGCD}(n,r)$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^r. \end{array}\right.$

1. Montrer que f est un morphisme de groupes.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Montrer que l'image de f est le sous-groupe de $(G,*)$ engendré par a^d.
4. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Déterminer les solutions de l'équation $x^r = y$ d'inconnue $x \in G$.

12 CCINP

Soit $(G,*)$, $(H,\times)$ deux groupes et f un morphisme de groupes de $(G,*)$ vers $(H,\times)$.

1. Soit $x \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que x est d'ordre fini égal à n. Montrer que $f(x)$ est d'ordre fini et que son ordre divise n.
2. Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +)$.
3. Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.

13 Mines-Télécom 2019

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{N}^2$, on note $x \vee y$ le PPCM de x et y, et $x \wedge y$ le PGCD de x et y. Déterminer tous les couples $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant

$$x \vee y + 11(x \wedge y) = 203.$$

14 Mines-Télécom 2019

Par combien de 0 se termine l'écriture décimale de l'entier naturel 2022! ?

15 Mines-Télécom 2018

Résoudre le système

$$(S)\quad \begin{cases} x+y \equiv 4 \quad [11] \\ xy \equiv 10 \quad [11] \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

16 Mines-Ponts 2017

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n^{13} \equiv n\ [42]$.

3. Algèbre linéaire

17 CCINP 2021 (Marcelin)

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Soient f et g deux endomorphismes de E.

Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes

(i) $\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g$.

(ii) $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0\}$ et $E = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g$.

18 CCINP 2021 (Maïlane)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n > 1$, f endomorphisme de E.

1. Soit f un projecteur, la condition « $\mathrm{rg}\, f = 1$ » est elle nécessaire ? Suffisante ?
2. Soit f tel que $\mathrm{rg}\, f = 1$ et $\mathrm{tr}\, f = 1$. Montrer que f est un projecteur.
3. Déterminer une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de projecteurs.

19 CCINP - Mines-Télécom 2019

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et p, q des projecteurs de E.

1. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

   (P1) $p+q$ est un projecteur ;

   (P2) $p \circ q = 0 = q \circ p$;

   (P3) $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$.
2. On suppose que $p+q$ est un projecteur. Démontrer que

$$\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q).$$

20 Mines-Télécom 2019

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant de taille n défini par :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

21 CCINP 2019

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et g_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n+1}[X],\ g_n(P) = P(X+1) - P(X).$$

   Déterminer le noyau et l'image de g_n.
2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ g(P) = P(X+1) - P(X).$$

   Montrer que g est surjectif.

22 CCINP 2018

Soit $(a, m) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le système

$$(S)\quad \begin{cases} 3x + my + z = 1 \\ (m-3)x - z = -1 \\ x + y + mz = a \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en discutant selon les valeurs de m et a.

23 Mines-Télécom 2018

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

24 CCINP 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ fixée et

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto & -X + \mathrm{tr}(X)A. \end{array} \right.$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Montrer que u est injective si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 1$.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que u ne soit pas bijective.
4. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ fixée. Résoudre l'équation linéaire $u(X) = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

25 Mines-Télécom 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note f_k et g_k les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = \cos(kx) \text{ et } g_k(x) = \sin(kx).$$

Montrer que $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

26 Mines-Télécom 2018

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer, pour tout entier $n \geqslant 2$, le déterminant de taille n défini par :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos(\theta) & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}.$$

27 Mines-Télécom 2018

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

Soit u et v deux endomorphismes de E tels que $u + v = \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leqslant n$.

Démontrer que $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Im}(v)$ puis en déduire que u et v sont des projecteurs.

28 TPE 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^3 = 0$.

1. Montrer que $I_n + A$ est inversible.
2. Soit $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $AB = BA$. Démontrer que $A + B$ est inversible.

29 CCINP 2021 (Maximilien)

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe une base à déterminer dans laquelle
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer B^n.
3. Soient (u_n), (v_n), (w_n) telles que $u_0 = 0$, $v_0 = w_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = v_n + w_n \\ w_{n+1} = w_n \end{cases}$$
Exprimer ces suites en fonction de n.

30 Mines-Ponts 2021 (Maximilien)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie de dimension n et $\mathcal{F} = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de dormes linéaires.

Montrer que $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si
$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \exists x_0 \in E,\ (f_1(x_0), \dots, f_p(x_0)) = (\lambda_1, \dots, \lambda_p).$$

4. Réduction des endomorphismes

31 CCINP 2021 (Lucas)

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que pensez-vous de l'affirmation
$$AB = 0 \Longrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$
Question bonus hors exercice : trouver une condition supplémentaire à $AB = 0$ pour que cela implique $A = 0$.
2. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A - I_n)^2 = 0$. Montrer que $\operatorname{tr} A \in \mathbb{N}$.
   (b) Déterminer A dans le cas où $\operatorname{tr} A = 0$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A(A - I_n)^2 = 0$. A est-elle toujours diagonalisable ?

32 Mines Telecom 2021 (Éléonore)

Soit $n \geqslant 3$. On pose A la matrice carrée de taille n avec des 1 sur la première ligne, la première colonne et la diagonale et des 0 ailleurs.

Montrer que 1 est valeur propre de A et calculer son sous-espace propre.

Déterminer les autres valeurs propres de A et leurs sous-espaces propres.

33 Mines Telecom 2021 (Mariette)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que
$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^2 = \dots = \operatorname{tr} A^n$$
si et seulement si $\operatorname{Sp} A = \{1\}$.

34 CCINP 2019

Soit $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices :
$$A = \begin{pmatrix} b & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a) Exprimer A en fonction de I_n et J.
   b) Montrer que $P(X) = X^2 + (2 - 2b - n)X + (b-1)(n+b-1)$ est un polynôme annulateur de A.
   a) Déterminer les valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres de A.
   b) Calculer $\det(A)$.

35 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k B = B A^k$. Calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & BP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
3. Soit Q un polynôme annulateur de A, scindé à racines simples.
   Montrer que $Q'(A)$ est une matrice inversible.
4. Montrer que si M est diagonalisable, alors A est diagonalisable et $B = 0$.
5. Établir la réciproque.

36 TPE 2019

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

37 CCINP 2019

Soit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^2 - 4A$. En déduire un polynôme annulateur et le polynôme minimal de A. En déduire l'unique valeur propre de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-2)^2$.
3. Exprimer A^n en fonction de A, I_3 et n.
4. L'expression obtenue à la question 3) est-elle toujours vraie pour $n = 0$? $n = 1$? $n = -1$?

38 TPE 2019

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel défini par
$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\right),\ f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \right\}.$$

Soit T l'endomorphisme de E défini par :
$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ T(f)(x) = f(x+1).$$

Déterminer l'ensemble des valeurs propres de f.

39 CCINP 2019

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Dans cette question, on considère A comme matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Calculer les valeurs propres de A et déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.
   La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer le polynôme minimal de A.
2. Dans cette question, on considère A comme matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
   Calculer les valeurs propres de A et déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.
   La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer le polynôme minimal de A.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

40 Mines-Télécom 2019

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.
2. Justifier que A est diagonalisable et diagonaliser A.
3. Soit λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de A. On pose $B = A - \lambda_1 I_3$ et $C = A - \lambda_2 I_3$.
   Calculer BC, CB et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B^n et C^n.
   Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n en fonction de B et C, puis calculer A^n.

41 CCINP 2019

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E.

1. Démontrer que si f est bijectif, alors $f \circ g$ et $g \circ f$ ont même polynôme caractéristique.
2. Démontrer que si f, g sont bijectifs et $f \circ g$ est diagonalisable, alors $g \circ f$ est diagonalisable.
3. Démontrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.
4. Donner deux matrices A, B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonalisables et telle que AB est diagonalisable.

42 Mines-Télécom 2019

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + 4I_n = 0$.

1. Montrer que A n'admet aucune valeur propre réelle.
2. Montrer que n est pair.
3. Déterminer tr(A) et det(A).

43 CCINP 2019 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On suppose qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.
   Déterminer le polynôme caractéristique de B. En déduire une contradiction. Conclure.
3. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

44 CCINP 2019

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour tout vecteur $x \in E$, on pose $E(x) = \text{Vect}\left(\{f^k(x),\ k \in \mathbb{N}\}\right)$.

1. Déterminer $E(e_1)$.
2. Calculer le polynôme caractéristique de f et vérifier que 2 est valeur propre de f.
3. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.
   L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. Déterminer tous les vecteurs x de E tels que $E(x) \neq E$.

45 CCINP 2019

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.

1. Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
2. Déterminer le rang de f.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
4. En utilisant le lemme des noyaux, montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}\left(f^2 + \text{id}_E\right)$.
5. Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f^2 + \text{id})$.
6. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

46 CCINP 2019

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_+$ et $c \in \mathbb{R}_+$. On pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Diagonaliser A lorsque A est diagonalisable.
2. On suppose $c = 0$. Calculer $\exp(A)$.
3. On suppose $bc \neq 0$. Expliquer comment on peut calculer $\exp(A)$.

47 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\text{tr} : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \text{tr}(M). \end{array} \right.$

1. a) Montrer que $\text{Im}(\text{tr}) = \mathbb{R}$.
   b) Déterminer $\dim(\text{Ker}(\text{tr}))$.
   c) Montrer que $E = \text{Ker}(\text{tr}) \oplus \text{Vect}(I_n)$.
2. Montrer que l'endomorphisme $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M + \text{tr}(M) I_n \end{array} \right.$ est diagonalisable.
3. Soit $J \in E$ telle que $\text{tr}(J) = 0$ et l'endomorphisme $g : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M + \text{tr}(M) J. \end{array} \right.$
   Montrer que $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

48 Mines-Télécom 2019

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\exp(A)$ sans chercher à diagonaliser A.

49 CCINP 2019 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a) Justifier que A est diagonalisable.
   b) Déterminer les valeurs propres de A et une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.
2. Résoudre l'équation $X^2 + X = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Quelle solution de cette équation aurait pu être immédiatement obtenue à l'aide du théorème de Cayley-Hamilton ?

50 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que $A^n = I_n$ et que $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est une famille libre. Montrer que $\text{tr}(A) = 0$.

51 TPE - CCINP 2019

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer de deux manières différentes que A et B sont semblables.

52 **CCINP 2019** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que le polynôme $X^3 - X - 1$ admet une unique racine réelle λ, puis que $\lambda > 0$.
3. En déduire que det$(A) > 0$.

53 **CCINP 2019** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = M + 2M^\intercal$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. Calculer tr(f) et det(f).

54 **Mines-Télécom 2018**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme de E.

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^{k+1}\right)\right) \leqslant \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^{k}\right)\right) + \dim\left(\operatorname{Ker}(u)\right).$$
2. Dans la suite de cet exercice, on suppose que $u^n = 0$ et rg$(u) = n - 1$.
Démontrer que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, dim$\left(\operatorname{Ker}\left(u^k\right)\right) = k$.
3. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension k. Démontrer que $F = \operatorname{Ker}\left(u^k\right)$.

55 **CCINP 2018** Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par
$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f_n(P) = f(P)$.
   a) Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b) Calculer le déterminant de f_n.
   c) L'endomorphisme f_n est-il diagonalisable ?

56 **CCINP 2018** Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose
$$f(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\varphi(P) = f(P)$.
   a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   b) Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. a) Soit Q un vecteur propre de f. Montrer que $Q' \neq 0$ et déterminer le degré de Q.
   b) Déterminer les éléments propres de f.

57 **CCINP 2018**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 16 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 16 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Justifier que A est diagonalisable et diagonaliser A.
2. En déduire que B est diagonalisable et diagonaliser B.
3. Donner deux polynômes annulateurs de la matrice B ainsi que son polynôme minimal.

58 **CCINP - Mines-Télécom 2018**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$.

1. Montrer que toute valeur propre de M prend au plus quatre valeurs que l'on donnera.
2. a) Montrer que 0 ou -1 est valeur propre de M.
   Indication : utiliser det(A).
   b) Que peut-on en déduire pour le polynôme caractéristique de M ?
   c) La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. a) Justifier que A est diagonalisable et diagonaliser A.
   b) Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X = A$.
   Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}XP$ sont diagonales.
   c) Déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 + X = A$.

59 **Mines-Télécom 2018** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence p.

On suppose que e^N est diagonalisable. Le but de l'exercice est de démontrer que $N = 0_n$.

1. Déterminer les valeurs propres de e^N et en déduire que $\mathrm{e}^N = I_n$.
Indication : on pourra s'intéresser à une matrice semblable à e^N.
2. Déterminer le polynôme minimal de N.
3. En déduire que $N = 0_n$.

60 **Mines-Télécom 2018** Soit $E = \mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f \in E$, on définit la fonction $\Phi(f) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $\Phi(f)(0) = f(0)$ et, pour tout $x > 0$,
$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les éléments propres de Φ.

61 **Mines-Télécom 2018** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que B est nilpotente et $AB = BA$.

1. Démontrer que si A est inversible, alors $A^{-1}B$ est une matrice nilpotente.
2. Démontrer que det$(A + B) =$ det(A).
3. Démontrer que $A + B$ et A ont même polynôme caractéristique.

62 **CCINP 2018** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On pose $A = XY^\intercal$.
   a) Quelle est la taille de A ?
   b) Calculer A.
   c) Calculer le rang de A.
   d) Déterminer la dimension de Ker(A).
   e) Exprimer tr(A) en fonction de X et Y.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.
Montrer qu'il existe X et Y non nulles dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telles que $A = XY^\intercal$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.
   a) Quel est le spectre de A ?
   b) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si tr$(A) \neq 0$.

63 TPE 2018

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes. Démontrer qu'il existe $a \in E$ tel que $\left(a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{n-1}(a)\right)$ est une base de E.

64 CCINP 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer $P(B)$ en fonction de A, $P(A)$ et $P'(A)$.
3. Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est aussi.
4. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

65 CCINP 2018

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathcal{Z} = \{f \in \mathcal{L}(E),\ \forall g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.

1. Soit $f \in \mathcal{Z}$.
   a) Montrer que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
   b) En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = kx$.
2. Déterminer $\mathcal{Z}$. Vérifier alors que $\mathcal{Z}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et préciser sa dimension.
3. Soit f et g deux endomorphismes de E. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f \circ g - g \circ f = \lambda f$.
   Montrer que f et g ont un vecteur propre en commun. On étudiera d'abord le cas $\lambda = 0$.

66 CCINP 2018

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$, et $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

et $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Calculer J^k pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
2. Exprimer A en fonction des matrices de la famille $\left(J^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$.
3. Soit Q un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(Q) < n$. Montrer que $Q(J) \neq 0_n$.
4. Que peut-on en déduire sur le degré de π_J, polynôme minimal de J ?
5. Déterminer π_J et χ_J.
6. Montrer que A est diagonalisable et donner les valeurs propres de A.

67 CCINP 2018

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$.
3. Montrer que f n'est pas injectif. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde.*
4. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $\left(f(a), f^2(a)\right)$ est libre. En déduire que $\mathrm{rg}(f) = 2$.
5. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

68 CCINP 2018

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit p un projecteur de E distinct de l'endomorphisme nul et de id_E. On note Φ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \Phi(u) = u \circ p - p \circ u.$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u = u \circ p - p \circ u$.
   a) Montrer que $p \circ u = 0$ et $u = u \circ p$.
   b) En déduire que $u^2 = 0$ et $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
2. Justifier que Φ n'est pas injectif et déterminer $\mathrm{Ker}(\Phi)$.
3. Montrer que l'endomorphisme Φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
4. Montrer que $\mathcal{L}(E) = \mathrm{Ker}(\Phi) \oplus \mathrm{Im}(\Phi)$.

69 CCINP 2018

Soit $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/3 & 5/12 \\ 1/4 & 5/12 & 1/3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est diagonalisable et donner ses éléments propres.
2. Montrer que la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. On pose $N = \lim\limits_{n \to +\infty} M^n$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à N.
   Montrer que u est un projecteur et en donner les éléments caractéristiques.

70 CCINP 2018

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit f un endomorphisme de E tel que $\mathrm{rg}(f) = 1$.

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f^2 = \lambda f$.
2. A-t-on nécessairement $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$?
3. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
   (P1) il existe $c \in \mathbb{R}^*$ tel que cf est une projection ;
   (P2) $f \circ f \neq 0$;
   (P3) $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.
4. On suppose que f vérifie (P1). Montrer que f est diagonalisable et $\mathrm{tr}(f) \neq 0$.

71 CCINP 2018

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de M.
2. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telles que $M = A + B$, $A^2 = A$, $B^2 = 3B$ et $AB = 0_5 = BA$.
   Indication : on pourra procéder par analyse-synthèse.
3. Déterminer les rangs de A et B.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que M^n est combinaison linéaire de A et B. Déterminer les coefficients de cette combinaison linéaire.

72 CCINP 2018

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose $M(x) = \begin{pmatrix} x & x-a & \cdots & x-a \\ x-b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x-a \\ x-b & \cdots & x-b & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

et $\Delta(x) = \det\left(M(x)\right)$.

1. Montrer que Δ est une fonction polynomiale de degré au plus égal à 1.
2. On suppose que $a \neq b$. Calculer $\Delta(x)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$.

3. On suppose $a = b$. Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que $M(x)$ est diagonalisable et calculer $\Delta(x)$.

73 CCINP 2018

On note $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, on note $T(f)$ l'application de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \int_0^{1-x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour toute fonction $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Soit $f \in E$. Montrer que $T(f)$ est dérivable et calculer $T(f)'(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.
3. L'endomorphisme T est-il injectif ? surjectif ? Justifier les réponses.
4. Montrer que pour toute fonction $f \in E$, $\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.
   Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de T ?
5. Soit $f \in E$ un vecteur propre de T et λ la valeur propre qui lui est associée.
   Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + \dfrac{1}{\lambda^2}\, y = 0$ et vérifie $f(1) = 0$, $f'(0) = 0$.
6. Déterminer le spectre de T et donner le sous-espace propre associé à chaque valeur propre.
   On vérifiera que $\mathrm{Sp}(T)$ est une famille dénombrable convergeant vers 0.

74 CCINP 2018

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.
Soit f un endomorphisme de E de rang égal à 1. Montrer que f est diagonalisable ou nilpotent.

75 CCINP 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$. On note $\mathbb{K}$ l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Déterminer de trois manières différentes les valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$:
   (a) en utilisant la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre de A ;
   (b) en calculant le polynôme caractéristique de A ;
   (c) en déterminant le polynôme minimal de A.
2. La matrice A est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?
3. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ et déterminer une matrice $P \in \mathcal{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

76 CCINP - Mines-Télécom 2018

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et φ l'application définie sur E par

$$\forall P \in E,\ \varphi(P) = (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
3. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de φ.
4. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

77 Mines-Télécom 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$.

1. Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Démontrer que $\mathrm{rg}(A)$ est un entier pair.
3. Donner un exemple de matrice non nulle $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

78 Mines-Télécom 2018

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in E$ et pour tout $x \in [0,1]$, on pose

$$\Phi(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les éléments propres de Φ.

5. Algèbre bilinéaire

79 CCINP 2021 (Hugo)

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien avec E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$, a, b réels, et $\langle,\rangle$ le produit scalaire tel que $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b fg$.

On admet l'existence d'une suite orthonormale $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_n[X])^{\mathbb{N}}$ de polynômes tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg L_k = k$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note F_n le sous espace vectoriel des fonctions polynomiales engendré par L_0, ... , L_n et $P_n(f)$ la projection orthogonale de f sur F_n.

1. Exprimer $P_n(f)$ et $\|P_n(f)\|^2$ en fonction des L_k.
2. Montrer que que la suite $\left(\|f - P_n(f)\|^2\right)_n$ est décroissante.
3. Montrer que la suite $(L_n)_n$ est totale dans E.
4. Donnez la limite de la suite $\left(\|f - P_n(f)\|^2\right)_n$.
5. Montrez que $\|f\|^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f(t)L_k(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$.

80 Mines Telecom 2021 (Maryam)

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2.

1. Décrire l'ensemble des isométries vectorielles.
   Déterminer l'expression de la représentation matricielle d'une isométrie dans $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la représentation matricielle d'une isométrie vectorielle directe ne dépend pas de la base orthonormée choisie (à l'aide des règles de calcul usuelles sur $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$).
3. Trouver la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie représentée matriciellement par $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

81 CCINP 2019

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$. Soit u un vecteur unitaire de E. Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et tout $x \in E$, on pose $f_a(x) = x + a\langle x, u\rangle u$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que f_a est un endomorphisme symétrique de E.
2. a) Montrer qu'il existe un unique $b \in \mathbb{R}^*$ vérifiant
   $$\forall x \in E,\ \|f_b(x)\| = \|x\|.$$
   b) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f_b - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(f_b + \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.
3. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de f_a.
   Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}^*$ pour que f_a soit bijectif.

82 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\intercal M X \geqslant 0\}.$$

1. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de M sont positives.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
   a) Justifier que A est diagonalisable et diagonaliser A dans une base orthonormale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   b) Montrer que $A \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$.
   c) Montrer qu'il existe $R \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$.
3. Soit $B \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
   a) Montrer que $B^2 \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$.
   b) Montrer que si $AB = BA$, alors $(AB)^2 \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$.

83 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^\intercal = I_n$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 4. Que peut-on en déduire pour A ?
2. Démontrer que 0 et 1 ne sont pas valeurs propres de A.
   Indication : on pourra considérer $X^\intercal AX$ où X est un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ bien choisi.
3. Montrer que A est une matrice symétrique. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?
4. Déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 + M^\intercal = I_n$.

84 CCINP 2019

Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.
3. On pose $\alpha = \min\left\{\int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 \,\mathrm{d}t,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
   Justifier l'existence de α et déterminer α, ainsi que deux nombres réels a et b réalisant ce minimum, en utilisant deux méthodes différentes :
   — à l'aide de la base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ trouvée à la question précédente ;
   — en cherchant a et b de telle sorte que $X^2 - aX - b$ appartienne à $\mathbb{R}_1[X]^\perp$.

85 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $T_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

1. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ et $T_n^+(\mathbb{R})$ sont des sous-groupes de $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.
2. Montrer que $O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+(\mathbb{R}) = \{I_n\}$.
3. Montrer que pour toute $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique $(O,T) \in O_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OT$.
   Indication : on pourra utiliser une base orthonormale construite à l'aide du procédé de Schmidt.

86 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et U, V deux vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $M = I_n + UV^\intercal$ et $t = \mathrm{tr}(UV^\intercal)$.

1. Montrer que $M^2 - (t+2)M + (t+1)I_n = 0$. Indication : on pourra remarquer que $V^\intercal U \in \mathbb{R}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur t pour que M soit inversible.
   Dans ce cas exprimer M^{-1} en fonction de t, U, V et I_n.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur t, U et V pour que M soit diagonalisable.
   Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M.

87 Mines-Télécom 2019

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$.
Soit a, b deux vecteurs de E et f l'endomorphisme de E défini par $\forall x \in E,\ f(x) = \langle a, x\rangle b$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit diagonalisable.

88 CCINP - Mines-Télécom 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$. Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1. Justifier qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f.
2. Démontrer que l'application $\Phi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x, f(y)\rangle \end{array}\right.$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
3. Démontrer qu'il existe un unique endomorphisme symétrique g de $\mathbb{R}^n$ tel que $g^2 = f$ et n'admettant que des valeurs propres strictement positives.
4. Justifier que g est bijectif et démontrer que $(g^{-1}(u_1), \ldots, g^{-1}(u_n))$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire Φ.

89 Mines-Télécom 2018

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit F un sous-espace vectoriel de E et p le projecteur orthogonal sur F. Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2$ est indépendant du choix de la base orthonormée $\mathcal{B}$.

90 CCINP - Mines-Télécom 2018

Soit E un espace préhilbertien et p un projecteur de E.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
2. On suppose que p est un projecteur orthogonal. Démontrer que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
3. On suppose que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$. Démontrer que p est un projecteur orthogonal.
4. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^2$, $\varepsilon_1 = (1,0)$, $\varepsilon_2 = (1,1)$, $D = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et $\Delta = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$.
   Soit p le projecteur sur $\Delta = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$ parallèlement à $D = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$.
   a) Donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   b) Trouver $x \in E$ tel que $\|p(x)\| > \|x\|$.
5. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à
   $$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Démontrer que u est un projecteur orthogonal sur un plan dont on donnera un vecteur normal.

91 CCINP 2018

Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ et Φ l'application définie sur E^2 par $\forall (f,g) \in E^2,\ \Phi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.
On note P (resp. I) le sous-espace vectoriel de E des fonctions paires (resp. impaires).

1. Montrer que $E = P \oplus I$.
2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.
3. Montrer que $P^\perp = I$.
4. Soit Ψ la symétrie orthogonale de E par rapport à P.
   Soit $f \in E$. On note $\widehat{f} = \Psi(f)$. Déterminer $\widehat{f}(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$.

92 Mines-Télécom 2018

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$.

Soit a un vecteur unitaire de E. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note f_α l'endomorphisme de E défini par $\forall x \in E,\ f_\alpha(x) = x + \alpha\langle a, x\rangle a$.

1. Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que f_α soit bijectif.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer les éléments propres de f_α. Justifier de deux façons que f_α est diagonalisable.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que f_α soit une symétrie.

93 CCINP 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\intercal B)$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. Calculer la distance de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
4. Soit $H_n = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(X) = 0\}$.
   a) Montrer que H_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.
   b) Calculer la distance de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ à H_3.
   c) Calculer la distance de I_n à H_n.

94 TPE 2018

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, on considère le sous-espace vectoriel :

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}\right\}.$$

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.

6. Espaces vectoriels normés

95 Mines Telecom 2021 (Marcelin)

Soit $E = \mathbb{C}[X]$, $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \in E$.

On définit la norme $\|.\|$ par

$$\forall P \in E,\ \|P\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

Soit $b \in \mathbb{N}$, on définit l'application

$$f : \begin{array}{|lcl} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & P(b) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Étudier la continuité de f.

96 Mines-Télécom 2019

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $\varphi \in E$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty$.

Démontrer que N_φ est une norme sur E si et seulement si $\varphi^{(-1)}(\mathbb{R}^*)$ est dense dans $[0,1]$.

97 CCINP 2019

Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$ définie par $\forall t \in]-1,1[$,

$$f(t) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } t \in]-1,0] \\ \left(t^2 \sin\left(\dfrac{1}{t}\right), t^2 \cos\left(\dfrac{1}{t}\right)\right) & \text{si } t \in]0,1[\end{cases}$$

On note $\|\,.\,\|_2$ la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$.
2. Calculer $\|f'(t)\|_2^2$ pour tout $t \in]-1,1[$.
3. $f\,(]-1,1[)$ est-il connexe par arcs ? $f'\,(]-1,1[)$ est-il connexe par arcs ?

98 CCINP 2019

Soit $\ell^\infty = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N},\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$.

Pour toute suite $u \in \ell^\infty$, on pose $N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$.

1. Montrer que N_∞ est une norme sur ℓ^∞.
2. Soit E le sous-espace vectoriel de ℓ^∞ défini par $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty,\ u_0 = 0\}$.
   Montrer que N est une norme sur E. L'application N est-elle une norme sur ℓ^∞ ?
3. Comparer les normes N_∞ et N sur E.
4. Soit $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant p,\ u_n = 0\}$.
   L'ensemble F est-il un fermé de E pour la norme N_∞ ? pour la norme N ?

99 CCINP 2018

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et

$$F = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ A^2 = A\right\}.$$

1. Démontrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Démontrer que F est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Démontrer que F n'est pas compact.
4. Démontrer que F est d'intérieur vide.

100 CCINP 2018

Soit $(E, \|\,.\,\|)$ un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E. Soit $f : K \to K$ une application vérifiant $\forall (x,y) \in K^2,\ x \neq y \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.

1. a) Montrer que f admet au plus un point fixe dans K.
   b) Montrer que f admet un unique point fixe dans K, que l'on notera a.
   Indication : on pourra étudier sur K la fonction $\varphi : x \mapsto \|f(x) - x\|$.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $x_0 \in K$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   Démontrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.
   Indication : on pourra étudier la suite $(\|x_n - a\|)_{n\in\mathbb{N}}$.

101 CCINP 2018

Soit $(E, \|\,.\,\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et A un fermé non vide de E.

Soit $f : A \to A$ une application vérifiant $\exists k \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$, $\forall (x,y) \in A^2$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\,(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|)\,.$$

1. Montrer que f admet au plus un point fixe dans A.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $x_0 \in A$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \left(\frac{k}{1-k}\right)^n \|x_1 - x_0\|.$$

3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Démontrer que f admet un unique point fixe dans A.

102 Mines-Télécom 2017

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \text{ et } N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Comparer les normes N et $\|\,.\,\|_\infty$.

103 ENSEA 2017

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans E, où $n \geqslant \deg(P)$, on pose :

$$\|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2} \quad \text{et} \quad L(P) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

On admet que $\|\,.\,\|_2$ est une norme sur E. Démontrer que L est continue pour la norme $\|\,.\,\|_2$.

104 TPE 2017

On note $\ell^\infty(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des suites complexes bornées.

Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\ell^\infty(\mathbb{C})$, on pose $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\ell^\infty(\mathbb{C})$, on pose $\Phi(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $\|\,.\,\|_\infty$ est une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{C})$.
2. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\ell^\infty(\mathbb{C})$.
3. Montrer que l'application Φ est continue pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$.
4. On pose $M = \sup_{u\in\ell^\infty(\mathbb{C})\setminus\{0\}} \dfrac{\|\Phi(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty}$.
   Justifier l'existence de M et calculer M.

7. Dérivation, fonctions convexes et intégration sur un segment

105 CCINP 2021 (Clément)

Soit φ une fonction continue et convexe sur $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur un segment $[a,b]$.

1. Démontrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

   Indication : penser aux sommes de Riemann.
2. Montrer que $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}$.
3. (...)

106 CCINP 2019

Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+t}}$.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Étudier le comportement de g en 0^+.
4. Étudier le comportement de g en $+\infty$.
5. Tracer l'allure de la représentation graphique de g.

107 CCINP 2019

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair et f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant |P(t)|.$$

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$.
2. En déduire que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
3. Ce résultat subsiste-t-il si P est de degré pair ?

108 Mines-Télécom 2018

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

1. Justifier l'existence de $m = \inf_{x\in[0,1]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[0,1]} f(x)$ et montrer que $mM \leqslant 0$.
2. Montrer que f s'annule sur $[0,1]$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant -mM$.

   Indication : on pourra considérer la fonction $g : x \mapsto (M - f(x))\,(f(x) - m)$.

109 CCINP 2018

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $F_n'(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$x_n = \min\left\{x \in \mathbb{R}_+,\ F_n'(x) = 0\right\}.$$

   Montrer que $F_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t$.

110 CCINP 2018

Soit la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

1. Étudier la parité de f.
2. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$ puis tracer son graphe.
5. Donner un équivalent de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

111 CCINP 2017

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et T l'application définie sur E par

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$ et démontrer que

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{g \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}),\ g(0) = g'(1) = 0\right\}.$$

   L'endomorphisme T est-il injectif ? surjectif ?
3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ.

112 TPE 2017

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I vers $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est convexe sur I, alors pour tout $(a,b) \in I^2$, f est majorée sur $[a,b]$ et atteint son maximum en a ou b.
2. Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   (C1) f est convexe sur I.
   (C2) Pour tout $(a,b) \in I^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x) + \lambda x$ est majorée sur $[a,b]$ et atteint son maximum en a ou b.

113 TPE 2017

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'' + \left(2 - \cos\left(t^2\right)\right) y = 0.$$

1. Dans cette question, on suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) < 0$.
   a) Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
   b) On note $\mathcal{C}_f$ le graphe de f. Soit $a \in \mathbb{R}$. Écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a. En déduire une contradiction.
2. Montrer que l'équation $f(t) = 0$ admet au moins une racine réelle.

8. Suites et séries numériques

114 CCINP 2021 (Matthieu)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = u_n - \ln n$.

1. Montrer que $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ existe puis en trouver un équivalent.
2. Trouver un équivalent de $v_{n+1} - v_n$ puis en déduire que (v_n) converge vers une limite γ.
3. Trouver pour quelles valeurs de α la série de terme général $a_n = \alpha^{u_n}$ converge.

115 Mines Telecom 2021 (Mariette)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $f > 0$, $f' < 0$, $f(0) = 1$.
Soit $(x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, telle que $x_0 \in \mathbb{R}_*^+$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n f(x_n)$.

1. Étudier la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Étudier la série de terme général x_n.

116 TPE 2019

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^z.$$

117 Mines-Télécom 2019

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=2}^{n} \ln^\alpha(k)$.

118 Mines-Télécom 2019

Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$.

119 CCINP 2019

Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b}\, u_n$.

1. a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \ln\left(n^\alpha u_n\right)$.
   Déterminer une valeur α pour que la série $\sum_{n\geqslant 1} (x_{n+1} - x_n)$ converge.
2. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

120 CCINP 2019

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. On pose ℓ sa limite et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k$.
   Démontrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
3. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
4. En déduire un équivalent de u_n. La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge-t-elle ?

121 Mines-Télécom 2018

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k} - n$.

1. Étudier sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|\mathrm{e}^x - 1 - x| \leqslant 2x^2$.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} v_n$ puis donner un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$.

122 Mines-Télécom 2018

Soit, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = \ln\left(\frac{(2n-1)n}{(2n+1)(n-1)}\right)$.

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge et calculer sa somme.

123 Mines-Télécom 2018

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^{3/2}}$.

Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

124 Mines-Télécom 2017

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} k \ln(k)$ et $u_n = \frac{1}{S_n}$.

1. Déterminer un équivalent de S_n.
2. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$.

9. Suites et séries de fonctions

125 CCINP 2021 (Jéhanne)

On définit $Z(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^t}$.

1. Donner l'ensemble de définition de Z et son sens de variation.
2. Calculer la limite de Z en $+\infty$.
3. Montrer que $Z(t) \underset{t \to 1^+}{\sim} \frac{1}{t-1}$.
4. Étudier la convexité de Z sur son ensemble de définition.

126 CCINP 2021 (Amaury)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\} \mapsto \frac{1-x^{2n+2}}{1+x}$ et $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \mapsto \frac{1}{1+x}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels il y a convergence uniforme.
3. Déterminer une majoration de $\left|\int_0^1 (f_n(x) - f(x))\, \mathrm{d}x\right|$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\, \mathrm{d}t$.
4. Proposer une autre méthode pour déterminer cette limite.
5. Montrer que $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^{2k} - \sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}$.
6. Justifier a convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{1+k}$ et expliquer comment calculer la somme avec les questions précédentes.

127 Mines Telecom 2021 (Éléonore)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit, sur $\mathbb{R}^+$, $f_n : x \mapsto \frac{n\mathrm{e}^{-x}+x^3}{n+x}$.

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 f_n(t)\, \mathrm{d}t$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Autre question posée à l'oral : On note f la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = f_n - f$. Étudier la convergence de la série $\sum g_n$.

128 CCINP 2019

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$.

1. Déterminer l'ensemble D de convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$.
2. Montrer que la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur D.
3. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge-t-elle uniformément sur D ?

129 CCINP 2019

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{-nt^2}}{n^2+1}$.

1. Justifier que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations de u_n' sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire $\|u_n'\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |u_n'(t)|$.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
5. Étudier le sens de variation de la fonction f et donner l'allure de sa représentation graphique.
6. Démontrer que la fonction $g : t \mapsto f(t) - 1$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

130 CCINP 2019

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n(x)\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n}.$$

En déduire qu'il existe $N_x \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N_x$,

$$u_n(x) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

2. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
3. En étudiant la suite $\left(u_n\left(2^{n+1}\pi\right)\right)_{n\geqslant 1}$, montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\varphi(0) = 1 \text{ et, pour tout } x \in [-1,1]\backslash\{0\},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}.$$

Justifier que φ est bornée sur $[-1,1]$.

5. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[-1,1]$.
Indication : on pourra utiliser la fonction φ.

131 CCINP 2019

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,2]$, on pose

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n + \mathrm{Arcsin}(x-1).$$

1. Déterminer le domaine D de convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $\alpha \in]0,1[$. Étudier la convergence uniforme sur $[\alpha, 2-\alpha]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$ par deux méthodes différentes :
   - en étudiant les variations de $f_n - f$ sur $[0,1]$, où $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$;
   - en calculant $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\, \mathrm{d}t$.

132 CCINP 2019

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$, on pose $g_n(t) = \mathrm{e}^t \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $|g_n'(t)| \leqslant \frac{\mathrm{e}^t}{n}$.
   b) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$,

$$\left|\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right| \leqslant \frac{t}{n}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, on pose $h_n(x) = \int_0^x g_n(t)\, \mathrm{d}t$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 1}$ sur $[0,1]$.

133 Mines-Télécom 2019

Soit la fonction $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f.
2. Étudier la continuité de f sur D.
3. Étudier la dérivabilité de f sur D.

134 Mines-Télécom 2019

Soit $a \in]-1,1[$ fixé et la fonction $S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction S.
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$ puis déterminer un équivalent de S au voisinage de $+\infty$.
3. Déterminer $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $S(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{\text{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

135 Mines-Télécom 2019

Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{x\text{e}^{-nx}}{\ln(n)}.$$

1. Déterminer le domaine D de convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} u_n$.
2. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ sur D.
3. Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ sur D.

136 CCINP 2018

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, $f_n(t) = \frac{(t^2-1)^{n+1}}{n+1}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.
2. Étudier la convergence normale de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0,1]$.
3. Étudier la convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0,1]$.
4. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.
5. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{(t^2-1)^{n+1}}{n+1}\,\text{d}t$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
6. Calculer $\int_0^1 \ln\left(2-t^2\right)\,\text{d}t$ et en déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

137 Mines-Télécom 2018

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

138 CCINP 2018

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,\pi]$,

$$f_n(x) = \cos^n(x)\sin(x).$$

1. Étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,\pi]$.
2. Étudier les convergences simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0,\pi]$.

   La fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est-elle définie sur $[0,\pi]$? Est-elle continue sur $[0,\pi]$?

139 Mines-Télécom 2018

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}.$$

1. Montrer que la fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Démontrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$.

140 Mines-Télécom 2018

Soit la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \text{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_f.
3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

141 Mines-Télécom 2018

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right).$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer $\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

10. Intégrales généralisées, convergence dominée et intégrales à paramètre

142 Mines-Télécom 2019

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(x+\text{e}^{\alpha x}\right)\,\text{d}x.$$

143 CCINP 2021 (Théo)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue π-périodique telle que $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \int_0^\pi f(x)\mathrm{e}^{-x/n}\,\mathrm{d}x$ et $v_n = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-x/n}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de u_n et v_n.
2. Montrer qu'il existe $(a_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n S_n$ où $S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}$.
3. Montrer que $S_n \sim \frac{n}{\pi}$.
4. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5. Étudier la limite de (v_n).

144 CCINP

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n existe.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,+\infty[$, on pose $f_n(t) = \frac{1}{(1+t^4)^n}$.
   Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur $[0,+\infty[$.
   La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
5. Calculer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ en appliquant le théorème de convergence dominée.

145 CCINP 2019

Soit la fonction $f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f.
2. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
3. Calculer explicitement $f'(x)$ pour tout $x \in D$.
4. En déduire $f(x)$ pour tout $x \in D$.

146 CCINP 2019

Soit les fonctions

$$f : x \longmapsto \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$$

et

$$g : x \longmapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + g'(x) = 0$.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)$.
5. Démontrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

147 CCINP 2019

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n existe.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. On pose $\Gamma(a,b) = \int_0^{+\infty} x^a \mathrm{e}^{-bx}\,\mathrm{d}x$.
   a) Justifier l'existence de $\Gamma(a,b)$.
   b) Calculer $\Gamma(a,b)$ sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!.$$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$S_0 = (p+1)!\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}} + S_n.$$
   En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = (p+1)!\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}}$.

148 Mines-Télécom 2019

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

1. Soit $t \in]0,1[$. Écrire $\frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$.
2. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t$.
3. Justifier l'existence de $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$ et démontrer que $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$.

149 CCINP 2018

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de
   $$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}.$$
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.
3. La série $\sum_{k\geqslant 1} (-1)^k I_k$ converge-t-elle ? Si tel est le cas, calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k I_k$.

150 Mines-Ponts 2018

1. Justifier l'existence de $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et montrer que
   $$\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{1/2}^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$
2. En déduire la valeur de la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$.

151 Mines-Télécom 2018

Étudier la nature de $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ et si elle converge, calculer cette intégrale.

152 Mines-Télécom 2018

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier que l'intégrale I est convergente.
2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} g(x)$.
4. En déduire la valeur de I.

153 **Mines-Télécom 2018** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = x^n\left(1-\sqrt{x}\right)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

154 **TPE 2018**

Soit $x \in]1,+\infty[$. On pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$ et montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x)\zeta(x)$.

155 **CCINP 2021 (Pierre-Louis et Éléonore)**

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.
3. Calculer F' puis en déduire F.

156 **CCINP 2018** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que les fonctions $t \mapsto t^2 f(t)^2$ et $t \mapsto f'(t)^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto tf(t)f'(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$xf(x)^2 = \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t + 2\int_0^x tf(t)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $xf(x)^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
4. En déduire que
$$\left(\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant 4\left(\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right).$$

157 **CCINP 2018**

1. Énoncer le théorème de convergence dominée.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.
3. À l'aide du théorème de caractérisation séquentielle de la continuité et du théorème de convergence dominée, démontrer le théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre.

158 **Mines-Télécom 2018**

Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de I.
2. Montrer que $I = J$.
3. Montrer que $I + J = I - \dfrac{\pi\ln(2)}{2}$ et en déduire I.

159 **Mines-Ponts 2021 (Patrick)**

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^{tx}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Déterminer l'allure du graphe de f.

160 **Mines-Ponts 2021 (Maximilien)**

Soit $f : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ t^2\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) & \text{si } t \in]0,1] \end{cases}$

1. L'intégrale de f' converge-t-elle sur $]0,1]$?
2. f' est-elle intégrable sur $]0,1]$?

11. Séries entières

161 **CCINP**

Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $d_0 = 1$, $d_1 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \geqslant 2$:

$$d_n = \begin{vmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{1}{\sqrt{n+1}} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{n+1}} & \frac{n-1}{n} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}_{(n)}.$$

1. Calculer d_2 et d_3.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,
$$(n+1)d_n = nd_{n-1} + d_{n-2}.$$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|d_n| < 1$.
Que peut-on en déduire sur le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} d_n x^n$?
4. Soit $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^{n+1}$. Montrer que pour tout $x \in]-R,R[$,
$$(1-x)S'(x) - xS(x) = 1.$$
5. En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, $S(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$.
6. Déterminer d_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

162 **CCINP**

Soit la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n)x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln(n)x^n$.
2. Montrer que pour tout $x \in]-R,R[$,
$$(x-1)f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n.$$

3. Soit $x \in [0,1[$.
En remarquant que pour tout $n \geqslant 2$, $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, donner un encadrement de $(x-1)f(x)$.
4. Déterminer un équivalent de f en R^-.

163 CCINP

Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\text{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est solution sur $]-1,1[$ d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
3. Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1,1[$.
4. En déduire le développement en série entière de la fonction $g : x \mapsto \text{Arcsin}^2(x)$ sur $]-1,1[$.

164 Mines-Télécom 2018

1. Donner le développement en série entière de la fonction Arctan.
2. Exprimer, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.
3. Montrer que $\pi = 8\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}}{2n+1}$.
4. Soit $N \in \mathbb{N}$. Donner une majoration de l'erreur commise lorsqu'on approche π par la somme partielle :
$$S_N = 8\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}}{2n+1}.$$

165 CCINP 2017

Soit la fonction $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.
2. Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.
3. Montrer que f est continue sur D_f.
4. Déterminer $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.
5. Démontrer que $(1-x)f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$.

166 CCINP 2017

Soit $n \in \mathbb{N}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + (-1)^n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 4^n$.
3. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est strictement positif.
4. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.
Calculer $f(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$.
5. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
Indication : on pourra décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{X^2+X+1}{(1+X)^2(1-2X)}$.

167 Mines-Télécom 2017

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 x^n \ln(1-x)\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de a_n.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite. h
3. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a_n - na_{n-1} = -\dfrac{1}{n+1}$.
5. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ puis exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

168 TPE 2017

Soit la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.
2. Calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-R,R[$.
3. Étudier f en R et $-R$ (existence et valeur).

12. Équations différentielles

169 Mines Telecom 2021(Maryam)

1. Résoudre sur $]0,+\infty[$, $ty' - y = -1$.
2. Soit $(x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Exprimer r et θ en fonction de x et y en coordonnées polaires.
3. En posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\cos\theta$, montrer que résoudre
$$1 + x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - f(x,y) = 0 \qquad (E)$$
avec $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ revient à résoudre
$$1 + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - g(r,\theta) = 0$$
4. Terminer la résolution de l'équation aux dérivées partielles (E).

170 Mines-Ponts (Maximilien)

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(E) \quad y'' - 2xy' + \lambda y = 0$.

1. Montrer que les solutions de (E) sont toutes développables en série entière.
2. Soit f solution de (E) telle que $f(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathcal{O}}(x^k)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
   On pourra utiliser $A = \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)}f(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que f est polynomiale.

171 CCINP 2019

Résoudre le système différentiel
$$(S)\begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z. \end{cases}$$

172 CCINP 2019

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u \in E$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose $L_u(f) = f' + uf$.

1. Montrer que L_u est un endomorphisme de E.
2. Calculer $(L_u \circ L_u)(f)$ pour toute fonction $f \in E$.
3. Justifier que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle
$$y'' + 2xy' + \left(x^2+1\right)y = 0$$
est inclus dans E.
4. Résoudre l'équation différentielle $y''+2xy'+\left(x^2+1\right)y = 0$.

173 TPE 2019

Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x.$$

174 Mines-Télécom 2019

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y'' + y = \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$.
Indication : on pourra exprimer chaque solution de (E) à l'aide d'une intégrale.
2. Montrer qu'une seule des solutions de (E) admet une limite finie en $+\infty$.
Exprimer cette solution à l'aide d'une intégrale et donner sa limite en $+\infty$.

175 Mines-Ponts 2019

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et $q : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$.

Soit f une solution non nulle sur $[a, b]$ de l'équation différentielle $(E) : y'' + q(x)y = 0$.

Démontrer que f admet un nombre fini de zéros sur $[a, b]$.

176 CCINP 2018

Soit F l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant

(H1) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$;

(H2) f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$;

(H3) pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

1. Soit $f \in F$. Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + kf(x) = 0$.
2. Déterminer F.

177 CCINP 2018

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.
2. Montrer que $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est solution d'une équation différentielle de la forme $y'' + ay' + by = f(x)$, où a, b sont deux nombres réels et f est une fonction que l'on précisera.
3. Résoudre (E) et en déduire S.

178 CCINP 2018

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : \cos(x)y' - \sin(x)y = \cos^3(x) \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ puis sur } [0, \pi].$$

179 CCINP 2017

Soit l'équation différentielle $(E) : xy'' + 2y' + xy = 0$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. *Indication : on pourra commencer par rechercher toutes les solutions de (E) développables en série entière sur un voisinage de 0.*
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

180 CCINP 2017

Soit l'équation différentielle

$$(E) : x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1.$$

1. Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ à l'aide du changement de fonction $z : x \mapsto x^2y(x)$ où y est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$).
2. Soit f une solution éventuelle de (E) sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(0)$.
3. Soit la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
   a) Montrer que h se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, que l'on note à nouveau h.
   b) Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   c) Montrer que h est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

13. Calcul différentiel

181 TPE

Soit la fonction $f : \left|\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} \end{array}\right.$.

Démontrer que f admet un maximum global sur $\mathbb{R}_+^*$ et le déterminer.

182 CCINP

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\},\ f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$. On pose $u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$.
En discutant selon la valeur θ, étudier l'existence de la dérivée de f en $(0, 0)$ selon u_θ.
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles premières en $(0, 0)$?
4. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
La fonction f admet-elle des dérivées partielles du second ordre en $(0, 0)$?

183 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$.

Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$, dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

Soit u un vercteur fixé de $\mathbb{R}^n$ et g l'application de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle.$$

1. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $\langle f(h), h\rangle \geqslant 0$.
2. Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer la différentielle de g en tout point de $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que g admet sur $\mathbb{R}^n$ un unique point critique a et que $a = f^{-1}(u)$.
4. Montrer que g admet un extremum global en a.
Indication : on pourra étudier le signe de l'application $h \mapsto g(a + h) - g(a)$.

184 TPE 2019

Soit f l'application de $[0,1]^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(1,1)=0$ et $\forall (x,y)\in[0,1]^2\backslash\{(1,1)\},\ f(x,y)=\dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$.

1. Montrer que f est continue sur $[0,1]^2$.
2. Justifier que f admet un maximum sur $[0,1]^2$, puis déterminer ce maximum ainsi que tout point en lequel il est atteint.

185 CCINP 2019

Soit $f:(x,y)\mapsto x^2+\left(y^3-y\right)^2$.

Déterminer les extremums de f ainsi que tous les points en lesquels ces extremums sont atteints.

186 CCINP 2019

Soit f l'application de $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R},\ f(x,y)=x\left(\ln^2(x)+y^2\right).$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Déterminer les extremums locaux de f. La fonction f admet-elle des extremums globaux ?
3. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ et $\mathcal{S}$ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z=f(x,y)$.
   Donner l'équation du plan affine tangent à $\mathcal{S}$ au point $(a,b,f(a,b))$.
   Quelle est l'équation du plan affine tangent à $\mathcal{S}$ au point $(1,0,f(1,0))$?
4. Exprimer la différentielle de f au point $(1,1)$.

187 CCINP 2018

Soit l'ouvert $\Omega=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid r>0 \text{ et } \theta\in]-\pi,\pi[\right\}$.

On considère l'application $\varphi:\left|\begin{array}{ccc}\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos(\theta),r\sin(\theta))\end{array}\right.$.

1. Prouver que φ établit une bijection de Ω sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera.
2. Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F=f\circ\varphi$. Ainsi, pour tout $(r,\theta)\in\Omega$, $F(r,\theta)=f(x,y)$ où $x=r\cos(\theta)$ et $y=r\sin(\theta)$.
   Donner les dérivées partielles de F en fonction de celles de f.
3. Déterminer toutes les fonctions $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\forall (x,y)\in U,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

188 TPE 2017

Soit la fonction $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & x^4+y^4-2(x-y)^2.\end{array}\right.$

Déterminer les extremums locaux de la fonction f.

189 TPE 2017

Soit la fonction $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & x^4+y^3-3y-2.\end{array}\right.$

Déterminer les extremums locaux et globaux de la fonction f.

14. Probabilités

190 CCINP 2021(Mariette)

On considère un arbre dont N représente le nombre de fleurs à chaque saison. $N+1$ suit une loi géométrique de paramètre $p=0{,}1$.

La probabilité pour qu'une fleur devienne un fruit est de $2/3$ et la probabilité pour qu'un fruit parvienne à maturation est de $3/4$.

1. Calculer la probabilité d'avoir, à partir d'une fleur, un fruit qui arrive à maturation.
   Calculer $\mathbb{P}(N=n)$.
   Combien de fleurs y a-t-il en moyenne chaque saison sur l'arbre ?
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n=\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.
3. Calculer $\mathbb{P}(M=k)$ où M est le nombre de fruits arrivés à maturation.

191 Mines Telecom 2021 (Marcelin)

Soient $n\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{N}^*$.

On dispose de n urnes dans lesquelles sont réparties na boules de manière aléatoire et indépendante.

On définit Y_n le nombre d'urnes vides, et $S_n=\dfrac{Y_n}{n}$

1. Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(Y_n)$.
   On pourra définir, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si et seulement si l'urne numéro i est vide.
2. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

192 Mines Telecom 2021 (Amaury)

Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\varphi(n)=|\{k\in[\![1,n]\!],\ k\wedge n=1\}|$.

On écrit la décomposition primaire de n : $n=\displaystyle\prod_{i=1}^{N}p_i^{\alpha_i}$

On tire aléatoirement k dans $[\![1,n]\!]$.

On note A l'événement « le nombre tiré est premier avec n » et, pour tout i entre 1 et N, A_i l'événement « le nombre tiré est divisible par p_i ».

1. Donner un espace probabilisé décrivant l'expérience.
2. Exprimer $\mathbb{P}(A)$ en fonction de $\varphi(n)$ et n.
3. Montrer que $\mathbb{P}(A_i)=\dfrac{1}{p_i}$.
4. Montrer que la famille $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.
5. En déduire une expression de $\varphi(n)$ à l'aide de n et des p_i.

193 Mines-Télécom 2019

On lance 1000 fois un dé équilibré.

Montrer que la probabilité que la moyenne des lancers soit supérieure ou égale à 4 est inférieure à 2%.

194 CCINP 2019

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

On suppose que $X(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X\geqslant n)>0$.

On appelle **taux de panne** de X la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_n=\mathbb{P}(X=n|X\geqslant n).$$

1. Soit Y une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ telle que $Y(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y=n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$.
   a) Montrer que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité.
   b) Calculer le taux de panne $(y_n)_{n\geqslant 1}$ de Y.
2. Montrer que pour tout $n\geqslant 2$, $\mathbb{P}(X\geqslant n)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1-x_k)$.
3. En déduire, pour tout $n\geqslant 2$, $\mathbb{P}(X=n)$ en fonction de $x_1,\dots,x_{n-1},x_n$.
4. Déterminer toutes les lois de probabilités pour lesquelles le taux de panne est constant.

195 CCINP 2019

Soit $p \in]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de probabilité de Y_n. En déduire $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$.
2. Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $i \neq j$. Calculer $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$. La suite $(Y_n)_{n\geqslant}$ est-elle une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'espérance et la variance de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \dfrac{S_n}{n}$.
   Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{P}\left(\left|Z_n - p^2\right| \geqslant a\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

196 Mines-Télécom 2019

Soit $x \in]-1,1[$.

1. Montrer que la famille $\left(x^{k\ell}\right)_{(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}$.
   Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$.

197 CCINP 2019

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires indiscernables les unes des autres. On tire n boules simultanément.
   a) Quel est le nombre de tirages possibles ?
   b) Montrer que $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
2. Une puce se déplace sur une droite. Elle effectue des sauts de même amplitude, à intervalles de temps successifs égaux. Elle se déplace dans les deux sens avec la même probabilité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note c_n la probabilité qu'elle se trouve à l'origine O (sa position initiale) après le n-ième saut.
   a) Calculer c_{2n-1} et c_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   b) Déterminer un équivalent de c_{2n} à l'aide de la formule de Stirling.
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} c_{2n}$.
   Interpréter ce résultat.
3. La puce se déplace désormais dans un plan. Elle effectue des sauts de même amplitude, à intervalles de temps successifs égaux. Elle se déplace dans les quatre sens (gauche, droite, haut et bas) avec la même probabilité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n la probabilité qu'elle se trouve à l'origine O (sa position initiale) après le n-ième saut.
   a) Calculer d_{2n-1} et d_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   b) Déterminer un équivalent de d_{2n}.
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} d_{2n}$.
   Interpréter ce résultat.

198 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Soit X, Y et Z trois variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que X, Y, Z sont mutuellement indépendants et suivent chacune la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

1. Montrer que si $k \in [\![2,n+1]\!]$, $\mathbb{P}(X+Y=k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.
2. Montrer que si $k \in [\![n+2,2n]\!]$,
$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \frac{2n-k+1}{n^2}.$$
3. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $\mathbb{P}(X+Y=Z)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(X+Y+Z=n)$.

199 CCINP 2021 (Patrick)

Soit X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi géométrique de même paramètre $p \in]0,1[$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(X=Y)$. En déduire $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$ puis que $\mathbb{P}(X \leqslant Y) > \frac{1}{2}$.
2. Déterminer la loi de $X+Y$.
3. Calculer $\mathbb{P}(Z > n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   En déduire $\mathbb{P}(Z > X+Y)$.

200 Mines-Télécom 2018

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = \{-1,1\}$ et $\mathbb{P}(X_n=-1) = \mathbb{P}(X_n=1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, $Y_n = \dfrac{1}{2}(1+X_n)$ et $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_n.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de Z_n.
3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_n.
4. Soit $(d,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [1,+\infty[$. Déterminer la variance de $dS_{\lfloor t \rfloor}$.

201 CCINP 2018

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $p \in]0,1[$, $q = 1-p$ et $(\lambda,\mu) \in]0,1[^2$. On pose $\Omega = [\![1,n+1]\!]$ et on note $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ les deux applications définies sur Ω par

- pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}_1(k) = pq^{k-1}$ et $\mathbb{P}_1(n+1) = \lambda$;
- $\mathbb{P}_2(1) = 0$, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, $\mathbb{P}_2(k) = (k-1)p^2q^{k-2}$ et $\mathbb{P}_2(n+1) = \mu$.

1. Déterminer λ et μ pour que $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ définissent une loi de probabilité sur Ω.
2. Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On effectue n tirages successifs avec remise. On note X et Y les variables aléatoires respectivement égales au rang du premier tirage d'une boule blanche et au rang du deuxième tirage d'une boule blanche. Si aucune boule blanche n'est tirée, X prend la valeur $n+1$, et si une seule boule blanche est tirée, Y prend la valeur $n+1$.
   a) Déterminer les lois de probabilité de X et Y.
   b) Calculer l'espérance de X.

202 CCINP 2018

Soit $p \in]0,1[$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi géométrique de paramètre p.

On pose $T = \min\{X,Y\}$ et $Z = |X-Y|$.

1. Rappeler, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k)$, puis l'espérance et la variance de X.
2. a) Calculer $\mathbb{P}(T \geqslant k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   b) Donner, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une relation entre $\mathbb{P}(T=k)$, $\mathbb{P}(T \geqslant k)$ et $\mathbb{P}(T \geqslant k+1)$.
   c) En déduire la loi de T, la reconnaître et donner $\mathbb{E}(T)$.
   d) Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{T}\right)$.
3. a) Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}((T=k) \cap (Z=n))$.
   b) Déterminer la loi de Z et calculer son espérance.
4. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?
5. On pose $U = \max\{X,Y\}$. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{U}{T}\right)$.

203 Mines-Télécom 2017

Soit $p \in]0,1[$. Soit $(U_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, U_i suit la loi géométrique de paramètre p.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $T_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$.

Indication : on pourra utiliser la fonction génératrice de T_n.

204 CCINP 2018

Soit $p \in]0,1[$. Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \min_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Calculer $\mathbb{P}(Y_n > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   b) Déterminer la loi de Y_n, la reconnaître puis donner $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$.
2. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   a) Montrer que Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(Z > k)$ converge.
   b) Montrer que si Z admet une espérance, alors $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z > k)$.
   c) Retrouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance de Y_n.

205 CCINP 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$, et telles que $\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \lambda \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$.

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{1}{4^n}$.
2. Déterminer les lois de probabilité de X et Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer, à l'aide de la variable aléatoire $Z = X - 1$, l'espérance et la variance de X.
5. On note $B = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ où, pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $b_{ij} = \mathbb{P}(Y = i | X = j)$. Calculer B^2.
6. Déterminer les valeurs propres de B. La matrice B est-elle diagonalisable ? Déterminer la dimension de chaque sous-espace propre de B.

206 CCINP 2017

Soit $X_{1,1}, X_{1,2}, X_{2,1}, X_{2,2}$ quatre variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$, $\mathbb{P}(X_{i,j} = 1) = \mathbb{P}(X_{i,j} = -1) = \dfrac{1}{2}$. On pose $M = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $\mathbb{E}(\det(M))$.
   b) Justifier que les variables aléatoires $\det(M)$ et $-\det(M)$ suivent la même loi.
   c) Calculer $\mathbb{V}(\det(M))$.
2. a) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice orthogonale.
   b) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice inversible.
   c) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice diagonalisable.

207 Mines-Ponts 2017

Soit $p \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Un secrétaire téléphone à r clientes qui répondent avec une probabilité p. On suppose que les appels sont mutuellement indépendants. On note X le nombre d'appels nécessaires pour joindre toutes les clientes.

Déterminer la loi de probabilité, l'espérance, la variance et la fonction génératrice de X.

208 Mines-Ponts 2021 (Patrick)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a un générateur aléatoire « idéal » de nombres entiers entre 1 et N^2.

Soit X la variable aléatoire du moment où l'on obtient, pour la première fois, la deuxième apparition d'un entier.

1. Déterminer la loi de X.
2. Quelle est la valeur de X la plus probable ?