20

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}_n$$

On développe par rapport à la première ligne,

$$D_n = (a+b) \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1} - ab \begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a+b & ab & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & 0 \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

Donc $D_n = (a+b) D_{n-1} - ab\, D_{n-2}$

Donc $D_{n+2} = (a+b) D_{n+1} - ab\, D_n$

On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

$D_{n+2} - (a+b) D_{n-1} + ab\, D_n = 0$ Est-ce bien nécessaire ?

$r^2 - (a+b) r + ab = 0$

Donc $\Delta = (a+b)^2 - 4ab$
$= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab$
$= (a-b)^2$

Donc $r_1 = a$ et $r_2 = b$

Donc $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$ FAUX si $a = b$

Or $D_1 = a+b$ et $D_2 = a^2 + ab + b^2$

$$\begin{cases} \lambda a + \mu b = a+b \\ \lambda a^2 + \mu b^2 = a^2+ab+b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{a+b-\mu b}{a} \\ a(a+b-\mu b) + \mu b^2 = a^2+ab+b^2 \end{cases}$$

bricolage (et inutilement compliqué) Préférez des opérations sur les lignes.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{a+b-\mu b}{a} \\ \mu(b^2-ab) = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{a+b-\mu b}{a} \\ \mu = \dfrac{b}{b-a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{a+b-\frac{b}{b-a}b}{a} = \dfrac{-a^2+b^2-b^2}{ab-a^2} = -\dfrac{a}{b-a} \\ \mu = \dfrac{b}{b-a} \end{cases}$$

~~Donc~~ $\cancel{D_n = \dfrac{-a^2+b^2-b}{ab-a^2} a^n + \dfrac{b}{b-a} b^n}$

Donc $\boxed{D_n = \dfrac{a^{n+1}}{a-b} + \dfrac{b^{n+1}}{b-a}}$

Il manque le cas $a = b$.