Exercice (17)

Cela n'a aucun sens.

1) On a $A^3 + A^2 + A = A(A-j)(A-j^2) = 0$
Donc A est annulé par un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$.
A est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

On a donc $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, j, j^2\}$
d'où $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{0\}$
Si A est diagonalisable, alors c'est la matrice nulle.
Si A est ~~A est~~ la matrice nulle, alors elle est diagonalisable.
A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ssi $A = 0$

2) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
On a donc $f^3 + f^2 + f = 0$. endomorphisme induit. Dire que $\mathrm{Im} f$ stable par f
Soit g la restriction à f de $\mathrm{Im}(f)$ donc $g \in \mathcal{L}(\mathrm{Im} f)$
Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$
On a $x \in E$ tq $y = f(x)$
donc $g^2(y) + g(y) + y = f^3(x) + f^2(x) + f(x) = 0$

Donc $g^2 + g + id = 0$
$X^2 + X + 1$ est un polynôme annulateur de g.
Les racines de ce polynôme sont j et j^2.
On a donc $Sp_{\mathbb{C}}(g) \subset \{j, j^2\}$
g n'admet donc pas de valeur propre réelle.
Donc le polynôme caractéristique de g n'admet pas de racine sur $\mathbb{R}$. On note m le degré de ce polynôme.
m est donc forcément de degré pair.
En effet, un polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.
(C'est une fonction continue avec des limites infinies de signe opposé en $\pm\infty$. Par le TVI, il existe un réel en lequel il s'annule.)

dim(Im f) ou rg(f)

Puisque g est ~~la restriction de~~ l'endo induit par sur f ~~à~~ Im f, on a donc bien $m = $ rg(Im f) entier (car degré de polynôme) et pair

n'a aucun sens.

3) On cherche une matrice $A' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^3+A^2+A=0$ que l'on complétera avec des zéros.

Par 2i), on a $rg(A') = 2$. donc A' est inversible

$A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?

On a donc $ad - bc \neq 0$

On prend arbitrairement $a = b = 1$

donc $d \neq c$.

donc $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}$

Il suffit que A' vérifie $A'^2 + A' + I_2 = 0$

ce qui nous donne

$$\begin{cases} c+3=0 \\ d+2=0 \\ 2c+cd=0 \\ d+c+d^2+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} c=-3 \\ d=-2 \end{cases}$$

Donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $A^3 + A^2 + A = 0$.