

Exercice 75)

1)a) On suppose qu'il existe $\lambda \in K$ valeur propre associée au vecteur propre $X \in K^{2n}$ tel que $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ avec $(X_1, X_2) \in (K^n)^2$

$$\underline{X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$AX = \lambda X \text{ donc } \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

? donc $\Leftrightarrow \begin{cases} X_2 = \lambda X_1 \\ -X_1 = \lambda X_2 \end{cases}$

faux $\Leftrightarrow \begin{cases} -X_1 = \lambda^2 X_1 \\ -X_2 = \lambda^2 X_2 \end{cases}$

Si $K = \mathbb{R}$ on a $(\lambda^2 + 1)X_1 = (\lambda^2 + 1)X_2 \stackrel{!}{=} 0$ donc $X_1 = X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ impossible, donc par l'absurde λ n'existe pas et $\mathcal{S}_p(A)_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

Si $K = \mathbb{C}$ on a $(\lambda^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = i$ ou $\lambda = -i$ donc $\mathcal{S}_p(A)_{\mathbb{C}} = \{i, -i\}$.

$$b) \chi_A(X) = \begin{vmatrix} XI_n - I_n & \\ & I_n - XI_n \end{vmatrix}$$

ou multiplie les n dernières colonnes par X .

$$= \frac{1}{X^n} \begin{vmatrix} XI_n - XI_n & \\ & I_n - X^2 I_n \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{X^n} \begin{vmatrix} XI_n & 0_n \\ & I_n - (X^2 + 1)I_n \end{vmatrix}$$

Soit $k \in \{0, n\}$
 $C_{m+k} \leftarrow C_{m+k} + C_k$

$$= \frac{X^n}{X^n} (X^2 + 1)^n = (X^2 + 1)^n$$

Pas très rigoureux avec X indéterminée. Prendre plutôt $\chi_A(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$...

donc $\mathcal{S}_p(A)_{\mathbb{R}} = \emptyset$

et $\mathcal{S}_p(A)_{\mathbb{C}} = \{i, -i\}$.

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix}$

pourquoi?

donc $A^2 + I_{2n} = 0$

donc $p_A(X) = X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de A .
En particulier p_A est de degré minimal et est unitaire.

Donc p_A est le polynôme minimal de A .

p_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.
Ses racines sont exactement égales au spectre de A donc

$\mathcal{S}_p(A)_{\mathbb{R}} = \emptyset$ et $\mathcal{S}_p(A)_{\mathbb{C}} = \{i, -i\}$.

Mauvais argument

2) χ_A n'est pas scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$
donc A n'est pas trigonalisable dans $M_{2n}(\mathbb{R})$

3) $\text{rg}(A - iI_n) = \text{rg} \begin{pmatrix} -iI_n & I_n \\ -I_n & -iI_n \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -iI_n & -iI_n \end{pmatrix} = n$

donc $\dim \ker(A - iI_n) = \dim E_{-i}(A) = n$

Mieux : matrice
réelle et
op conjuguées

de même

$\text{rg}(A + iI_n) = \text{rg} \begin{pmatrix} iI_n & I_n \\ -I_n & iI_n \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ iI_n & iI_n \end{pmatrix} = n$

donc $\dim E_{-i}(A) = n$ et $\dim E_{-i}(A) + \dim E_{-i}(A) = \dim \mathbb{C}^{2n}$

donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

était déjà donné par $\pi_A = X^2 + 1$ scindé simple.

on construit une base de $E_+(A)$ avec $e_k = \begin{pmatrix} \delta_{1k} \\ \vdots \\ \delta_{nk} \\ i\delta_{1k} \\ \vdots \\ i\delta_{nk} \end{pmatrix}$

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad A e_k = i e_k$$

la famille $(e_1, \dots, e_n) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre
+ dimension

donc $E_+(A) = \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$

De même pour $E_-(A)$ avec $e'_k = \begin{pmatrix} \delta_{1k} \\ \vdots \\ \delta_{nk} \\ -i\delta_{1k} \\ \vdots \\ -i\delta_{nk} \end{pmatrix}$

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad A e'_k = -i e'_k$$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre

$E_-(A) = \text{vect}(e'_1, \dots, e'_n)$

on pose $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ iI_n & -iI_n \end{pmatrix}$$

et $D = \begin{pmatrix} iI_n & 0_n \\ 0_n & -iI_n \end{pmatrix}$

on a alors $A = P D P^{-1}$