Exercice 69 :

1) $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/3 & 5/12 \\ 1/4 & 5/12 & 1/3 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral, M est diagonalisable

Calculons le polynôme caractéristique de M :

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X-1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & X-1/3 & -5/12 \\ -1/4 & -5/12 & X-1/3 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow 12L_1 \\ L_2 \leftarrow 12L_2 \\ L_3 \leftarrow 12L_3}}{=} \frac{1}{12^3} \begin{vmatrix} 12X-6 & -3 & -3 \\ -3 & 12X-4 & -5 \\ -3 & -5 & 12X-4 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1+(4X-2)L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2-L_3}}{=} \frac{1}{12^3} \begin{vmatrix} 0 & -20X+7 & (12X-4)(4X-2)-3 \\ 0 & 12X+1 & -12X-1 \\ -3 & -5 & 12X-4 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{dvlp}^t\ \%\ L_3}{=} \frac{-3}{12^3} \begin{vmatrix} -20X+7 & 48X^2-40X+5 \\ 12X+1 & -12X-1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-3}{12^3}(12X+1)(20X-7-48X^2+40X-5)$$

$$= \frac{3}{12^2}\left(X+\frac{1}{12}\right)(48X^2-60X+12)$$

$$= \frac{3}{12}\left(X+\frac{1}{12}\right)(4X^2-5X+1)$$

$$= \frac{1}{4}\left(X+\frac{1}{12}\right)(X-1)(4X-1)$$

D'où $\chi_M = \left(X+\frac{1}{12}\right)(X-1)\left(X-\frac{1}{4}\right)$, donc $Sp_{\mathbb{R}}(M) = \left\{-\frac{1}{12} ; \frac{1}{4} ; 1\right\}$

Ainsi, chaque espace propre est de dimension 1 ; cherchons un vecteur non nul de chacun d'eux.

- $M + \frac{1}{12} I_3 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, on remarque $C_2 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Donc $\operatorname{Ker}\left(M + \frac{1}{12} I_3\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

- $M - \frac{1}{4} I_3 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, on remarque $2C_1 - C_2 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Donc $\operatorname{Ker}\left(M - \frac{1}{4} I_3\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

• $M - I_3 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -8 & 5 \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix}$, on remarque $C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\underline{\mathrm{Ker}(M - I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$

---

2) D'après la question 1, on peut écrire $M = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} -1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

On a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -1/6 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ (méthode de Gauss-Jordan). Formule de la comatrice plus efficace ? Et même encore mieux : orthodiagonaliser ! Comme cela, $P^{-1} = P^T$!!

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$ (Et ici, il suffisait de normaliser les vecteurs ...)

Or, $D^n = \begin{pmatrix} (-1/12)^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $\underline{M^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -1/6 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ Il manque un argument de continuité.

---

3) On a $N = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Or $N^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = N$, donc par caractérisation, u l'endomorphisme canoniquement associé à N est un projecteur.

Rq : Bien sûr, vrai en général car $(M^2)^n = M^{2n} \longrightarrow N$, $M^n \times M^n \longrightarrow N^2$ donc $N^2 = N$.

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$.

On a $N\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x+y+z}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. $p = u$? Se voit directement sur la matrice !

On a alors $\dim(\mathrm{Ker}(p)) = 2$ par le théorème du rang.

On remarque $N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ libre.

Donc $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Ainsi, p est la projection sur $\underline{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ parallèlement à } \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$

Plutôt sur $\mathrm{Vect}((1,1,1))$, parallèlement à $\mathrm{Vect}((0,1,-1),(1,0,-1))$.