Exercice 67

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tq $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$

1) Montrons que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$

* Soit $x \in E$, on a $x = -f^2(x) + \underbrace{x + f^2(x)}_{=u}$

- $f(u) = f(x + f^2(x)) = f(x) + f^3(x) = 0$ donc $u \in \mathrm{Ker}(f)$
- $-f^2(x) = f^2(-x)$ donc $-f^2(x) \in \mathrm{Im}(f)$

Donc $x = \underbrace{-f^2(x)}_{\in \mathrm{Im}(f)} + \underbrace{x + f^2(x)}_{\in \mathrm{Ker}(f)}$ $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$

Rédaction

* Montrons que la somme est directe :

Soit $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$

Alors $y = f(x)$ donc $f(y) = 0 = f(f(x)) = f^2(x)$

donc $f^3(x) = 0$

donc $-f^3(x) = 0$ or $f^3(x) + f(x) = 0$ donc $f(x) = -f^3(x)$

donc $f(x) = y = 0$

donc on a bien que la somme est directe

Au final, on a $\boxed{\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)}$

---

2) Montrons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f^2 + id)$

On a $x \in E$

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$ tq $y = f(x)$, but : $y \in \mathrm{Ker}(f^2 + id)$

$(f^2 + id)(y) = (f^2 + id)(f(x)) = f^3(x) + f(x) = 0$

donc $y \in \mathrm{Ker}(f^2 + id)$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2 + id)$

alors $(f^2 + id)(x) = 0$ donc $f^2(x) + x = 0$

donc $x = -f^2(x) \in \mathrm{Im}(f)$
$= f(f(-x))$

ou par un argument de dimension : par le lemme de décomposit° des noyaux $(X \wedge (X^2 + 1) = 1)$

$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + id)$

Et d'après 1), $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

En passant aux dimensions, on a bien $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f^2+id))$
(et en ne montrant qu'une inclusion)

---

3) On est en dimension finie, donc si f était injectif, il serait bijectif, on aurait alors :

$$f^3 + f = 0 \iff f \circ (f^2 + id) = 0$$
$$\iff f^2 + id = 0$$
$$\iff f^2 = -id_{\mathbb{R}^3}$$

Or $\det(f^2) = \det(-id) = \det \begin{pmatrix} -1 & & (0) \\ & -1 & \\ (0) & & -1 \end{pmatrix} = -1$

et $\det(f^2) = (\det(f))^2$

On aurait alors $\det(f^2) = -1$, absurde

Donc f n'est pas injectif

Sans raisonner par l'absurde, comme 3 est impair, f a au moins une vp réelle, or X^3+X annule f, donc $Sp_{\mathbb{R}} f \subset \{0\}$, donc $Sp_{\mathbb{R}}(f) = \{0\}$ et f n'est pas injectif.

---

4) Mq $\exists a \in \mathbb{R}^3$ tq $(f(a), f^2(a))$ est libre

On a $f \neq 0$ donc il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(a) \neq 0$

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f(a) + \beta f^2(a) = 0$ $(*)$

On applique f aux deux membres :

$$\alpha f^2(a) + \beta f^3(a) = 0 \quad \text{or} \quad f^3(a) = -f(a)$$

donc $\alpha f^2(a) - \beta f(a) = 0$ $(**)$

puis
$$\alpha(*) - \beta(**) = \alpha^2 f(a) + \beta^2 f(a) + \cancel{\beta\alpha f^2(a)} - \cancel{\beta\alpha f^2(a)}$$
$$= \alpha^2 f(a) + \beta^2 f(a)$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2) f(a) = 0 \quad \text{et} \quad f(a) \neq 0$$
$$= 0$$

donc $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ donc $\alpha = \beta = 0$ donc $\boxed{(f(a), f^2(a)) \text{ est libre}}$

* $(f(a), f^2(a))$ est libre donc $rg\, f = \dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 2$
et $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ (f non injectif) alors $\dim \mathrm{Im}(f) \leq 2$ $\Big\}$ $rg(f) = 2$

---

5) Soit $u \in \mathrm{Ker}(f)$ on pose $\mathcal{B} = (u, f(a), f^2(a))$ base de $\mathbb{R}^3$ et $f(f(a)) = f^2(a)$

$f(f^2(a)) = f^3(a) = -f(a)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u) & f(f(a)) & f(f^2(a)) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow u \\ \leftarrow f(a) \\ \leftarrow f^2(a) \end{array}$$

à justifier par 1 et 4 en prenant bien $u \neq 0_E$