(66)

1. $$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Par récurrence on obtient,

Bof. Il vaut mieux s'intéresser à l'endomorphisme canoniquement associé $j : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_n, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ et remarquer que $j^k : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{n-k+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_{n-k})$ (mais récurrence quand même)

Soit $k \in [\![1, n]\!]$

$$J^k = \begin{array}{c} \\ \\ \\ (n-k+1)^{\text{ème}} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$k^{\text{ème}}$ ↓ ; ← $k^{\text{ème}}$ non ; ↑ $(n-k+1)^{\text{ème}}$

2. $$\boxed{A = a_0 I_n + a_1 J + \dots + a_{n-1} J^{n-1}}$$

3. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non nul

$\deg Q \leqslant n-1$

On pose $Q = \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$

dès lors

$$Q(J) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_2 \\ b_2 & & \ddots & \ddots & b_1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_0 \end{pmatrix}$$

et ~~Q(J) = 0 ssi~~ $Q(J) = O_n$

$\iff b_0 = b_1 = \cdots = b_{n-1} = 0$

or Q n'est pas le polynôme nul

donc $\boxed{Q(J) \neq O_n}$

4 - π_J est le polynôme minimal de J

tel que $\pi_J(J) = O_n$

et $\deg \pi_J \leq n$

D'où d'après 3 - $\boxed{\deg \pi_J = n}$

5 - $\chi_J = \det(XI_n - J)$

$$= \begin{vmatrix} X & -1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & -1 \\ -1 & & & X \end{vmatrix}$$

Soit $\chi_J \underset{\substack{\text{dvpt} \\ \% \, C_1}}{=} X \begin{vmatrix} X & -1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & -1 \\ & & & X \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & & & (0) \\ X & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & X & -1 \end{vmatrix}$

$$= X^n + (-1)^n \times (-1)^{n-1}$$

$$= X^n - 1$$

d'où $\boxed{\chi_J = \pi_J = X^n - 1}$

justifier

6_ Ainsi J est diagonalisable car χ_J scindé simple

car $\chi_J = X^n - 1$

donc $Sp\, J = \mathbb{U}_n$

Donc on a $P \in GL_n(\mathbb{C}) \mid J = P \begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi}{n}} & & & (0) \\ & e^{\frac{4i\pi}{n}} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & e^{2i\pi} \end{pmatrix} P^{-1}$ $= 1$

~~en posant~~ $\cancel{D = \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}$

En général, on écrit plutôt $1, e^{\frac{2\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}$
(mais peu importe.)

or $A = a_0 I_n + a_1 J + \dots + a_{n-1} J^{n-1}$

$$= P\left(a_0 I_n + a_1 \begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi}{n}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{2i\pi} \end{pmatrix} + \dots + a_{n-1} \begin{pmatrix} e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{2i(n-1)\pi} \end{pmatrix}\right) P^{-1}$$

d'où $\boxed{Sp\, A = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{\frac{2i\ell k\pi}{n}} \mid \ell \in [\![1, n]\!] \right\}}$

qui est bien une diagonalisation.

$= \{P(\omega) ; \omega \in \mathbb{U}_n\}$ où $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.