1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc A est symétrique réelle donc A diagonalisable

0 valeur propre de multiplicité 3 car $rg(A) = 1$ + formule du rang

et 4 valeur propre de A car :

$A - 4I_4 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$

donc $\exists P \in GL_4(\mathbb{R})$ tq $A = P \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ (0) & & & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$

Il faut préciser P (voire P^{-1} qui serait facile à calculer avec une orthodiagonalisation)

2) ~~Si~~ On sait que A diagonalisable tq $A = PDP^{-1}$, D diagonale :

$B = A + 15 I_4 = PDP^{-1} + 15 P I_4 P^{-1}$

$= P(D + 15 I_4) P^{-1}$

$= P \begin{pmatrix} 15 & & & (0) \\ & 15 & & \\ & & 15 & \\ (0) & & & 19 \end{pmatrix} P^{-1}$

Donc B diagonalisable

3) vu ci dessus $\chi_B = (X-15)^3 (X-19)$

et par le théorème de Cayley Hamilton $\chi_B(B) = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ de plus le polynome nul annule B.

car B est diagonalisable

et $Sp(B) = \{15, 19\}$ vu Q2) donc $\Pi_B = (X-15)(X-19)$