

Banque Oral - N° 53

1)

f est linéaire :

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(A + \lambda B) = (A + \lambda B) + 2(A + \lambda B)^T$$

la transposée est linéaire $\rightarrow$

$$\begin{aligned} &= A + 2A^T + \lambda(B + 2B^T) \\ &= f(A) + \lambda f(B) \end{aligned}$$

De plus, Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On a $M^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $2M^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Puis :

$$f(M) = M + 2M^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

donc f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2)

$$\begin{aligned} \lambda \text{ np de } f &\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \text{ tel que } f(X) = \lambda X \\ &\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \text{ tel que } X + 2X^T = \lambda X \\ &\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \text{ tel que } X^T = \frac{\lambda - 1}{2} X \end{aligned}$$

$$\bullet \lambda = 3 : X^T = X \quad E_3(f) = \mathcal{I}_n(\mathbb{R})$$

$$\bullet \lambda = -1 : X^T = -X \quad E_{-1}(f) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \text{On } \dim E_3(f) + \dim E_{-1}(f) &= \dim \mathcal{I}_n(\mathbb{R}) + \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

donc il ne peut pas y avoir d'autre
vecteur propre.

$$\text{Sp}(f) = \{-1, 3\}$$

3) f est donc diagonalisable car on a vu que

$$\dim E_{-1}(f) + \dim E_3(f) = \dim M_n(\mathbb{R})$$

On sait que $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
qui se montre par analyse - synthèse
ou avec des arguments de dimension et d'intersection
ou en utilisant une symétrie.

4) Soit B_c la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$
On se $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ tel que
 $\text{mat}_{B_c}(f) = P D P^{-1}$

Avec

$$D = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 3 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 3 \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} \frac{n(n-1)}{2} \\ \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} \frac{n(n+1)}{2} \end{matrix}$$

La trace et le déterminant sont des invariants
de similitude

$$\text{tr}(f) = \text{tr}(D) = (-1) \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + 3 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = n(n+2)$$

$$\det(f) = \det(D) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \times 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$$