$\boxed{52}$ 1) On pose $P = X^3 - X - 1$. P est scindé sur $\mathbb{C}$.

De plus, $P' = 3X^2 - 1$ admet 2 racines réelles distinctes (car $\Delta = 12$) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

intérêt ?

Ces deux racines ne sont pas racines de P. Donc P est scindé à racines simples.

évident ?

Donc A ($\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) est annulée par un polynôme à racines simples.

Donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2) $f : x \longmapsto P(x) = x^3 - x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations

On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx -0{,}62$	$\searrow$	$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx -1{,}38$	$\nearrow$	$+\infty$

et on a : $\begin{cases} f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = P\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx -0{,}62 \\ f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx -1{,}38 \\ \cancel{\lim_{x\to+\infty}} f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \\ \cancel{\lim_{x\to-\infty}} f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty \end{cases}$

Pas vraiment : juste de la monotonie

D'après l'extension du théorème des valeurs intermédiaires P n'admet pas de racines sur $\left]-\infty ; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ et $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Non

D'après ce même théorème, P admet une unique racine sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{3} ; +\infty\right[$ donc sur $\mathbb{R}$ et cette racine est donc strictement positive.

3) A est diagonalisable donc χ_A est scindé

donc $\det A = \prod_{\mu \in Sp A} \mu^{m_\mu}$ avec m_μ la multiplicité de la valeur propre μ

Or, ~~comme~~ $Sp\,A \subset \mathcal{Z}(P)$ avec $\mathcal{Z}(P)$ l'ensemble des racines du polynôme P et $\mathcal{Z}(P) = \{\lambda, \mu, \bar{\mu}\}$, λ étant l'unique racine réelle de P et μ une racine complexe non réelle de P avec $\bar{\mu}$ son conjugué.

Si $Sp\,A = \{\lambda\}$, $\det A = \cancel{\prod} \lambda^{m_\lambda}$ avec $\lambda > 0$

donc $\det A > 0$.

car $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Si $Sp\,A = \{\lambda, \mu, \bar{\mu}\}$, $\det A = \lambda^{m_\lambda} \times \mu^{m_\mu} \times \bar{\mu}^{m_\mu}$

(si μ valeur propre de A de multiplicité m_μ, alors $\bar{\mu}$ valeur propre de A de multiplicité m_μ)

donc $\det A = \lambda^{m_\lambda} \times \left(|\mu|^2\right)^{m_\mu}$ avec $\begin{cases} \lambda > 0 \\ |\mu| \geq 0 \end{cases}$

$0 \notin Sp\,A$ (Or on a $A(A - I_n) = I_n$ donc A inversible donc $\det A \neq 0$.

Donc $\det A > 0$ dans tous les cas.