51) Montrons de deux manières que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables

▸ 1ère méthode : Avec leur polynôme caractéristique

$*\ \chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X & 0 \\ -2 & -1 & X \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & X \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + X \begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = -(1-2X) + X(X^2-1)$

dév. p/r 3e C

$\chi_A = X^3 - 3X - 1$

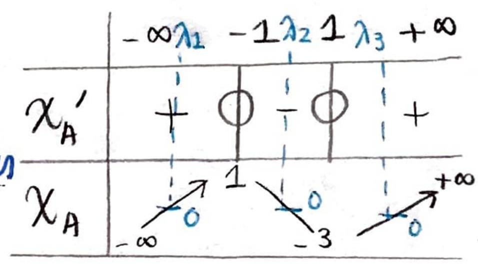
$*\ \chi_B = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ -1 & -2 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & -1 \\ -2 & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X(X^2-2) + (-X-1)$

$\chi_B = X^3 - 3X - 1$

$\chi_A = \chi_B = X^3 - 3X - 1$

Puis montrons que A et B sont diagonalisables.

$\chi_A' = 3X^2 - 3 = 3(X^2-1) = 3(X-1)(X+1)$



Par le Théorème des valeurs intermédiaires

On a $\chi_A = \chi_B = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$

Donc $Sp(A) = Sp(B) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$

On a 3 vp distinctes en dimensions 3 donc A et B diagonalisables

D'où $A = PDP^{-1}$ et $B = QDQ^{-1}$ où $D \in \mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ et $Q, P \in GL_3(\mathbb{R})$

A et B semblables à une même matrice D donc $\boxed{\text{A et B st semblables}}$

▸ 2ème méthode : Avec la formule de changement de base

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de ?

f l'endomorphisme canonique associé à A

g " " " B

On a : $f(e_1) = e_2 + 2e_3$ | $g(e_1) = e_2 + e_3$

$f(e_2) = e_1 + e_3$ | $g(e_2) = e_1 + 2e_3$

$f(e_3) = e_1$ | $g(e_3) = e_2$

On cherche alors $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle

$f(e_1') = e_2' + e_3'$

$f(e_2') = e_1' + 2e_3'$

$f(e_3') = e_2'$

On pose alors $e_3' = e_3$, $e_2' = e_1$ et $e_1' = e_2$

On a alors $f(e_3) = e_1$ s'écrit $f(e_3') = e_2$

$f(e_1) = e_2 + 2e_3$ " $f(e_2') = e_2' + 2e_3'$

$f(e_2) = e_1 + e_3$ " $f(e_1') = e_2' + e_3'$ } Vérification

On a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} f = B = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f}_{= A} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Donc en posant $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = P \in GL_3(\mathbb{R})$ (matrice de passage), on obtient

$B = PAP^{-1}$ donc $\boxed{\text{B et A sont semblables}}$

Oui. Il suffit de dire que A et B représentent un même endomorphisme f.