exercice 39 - CCINP 2019

**1)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -1 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix}$

on développe par rapport à la première colonne

$= (X-1)(X^2+1)$

d'où $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$.

$E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_3)$

$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad 1 \times C_1 + 0 \times C_2 + 0 \times C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d'où $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{libre}}\right)$

avec 1 valeur propre simple

L'argument est-il bien clair ?

donc $\dim E_1(A) = 1 \neq 3$ donc A non diagonalisable

Soit $\Pi_A$ polynôme minimal de A. $\Pi_A$ : unitaire

Par Cayley-Hamilton : $\Pi_A \mid \chi_A \Rightarrow \Pi_A \in \{X-1 ; X^2+1 ; (X-1)(X^2+1)\}$.

rédaction

$A \neq I_3$ donc $\Pi_A \neq X-1$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq -I_3$ donc $\Pi_A \neq X^2+1$.

donc $\Pi_A = (X-1)(X^2+1) = \chi_A$.

---

**2)** $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. $\chi_A = (X-1)(X^2+1)$ donc $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{1 ; i ; -i\}$

$A - iI_3 = \begin{pmatrix} 1-i & 1 & 1 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix}$

$-C_1 + iC_2 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \in E_i(A)$.

OR i valeur propre simple donc (là, c'est plus clair)

$\dim E_i(A) = 1$

donc $E_i(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

$$A+iI_3 = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix}$$

de même $E_{-i}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

(on conjugue le vecteur propre)

Toutes les valeurs propres de A sont racines de $\chi_A$

? donc $\pi_A = \chi_A$.

Étrange argument (3 vp ≠ en dim 3 donc diagonalisable donc $\pi_A = \chi_A$)

$\dim E_1(A) + \dim E_{-i}(A) + \dim E_i(A) = 3$

donc A diagonalisable.

---

3. On diagonalise : Soit $P \in GL_3(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{D}_3(\mathbb{K})$

tels que $A = PDP^{-1}$

où $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -i & i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \times (\mathrm{Com}\, P)^T$ d'après la formule de la comatrice.

$\det P = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -i & i \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2i$.

$\mathrm{Com}\, P = \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -i \\ 0 & -i & -i \end{pmatrix}$

D'après xcas, on doit trouver

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & i/2 & 1/2 \\ 0 & -i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

d'où $P^{-1} = \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$

On avait P diagonale par blocs

(On avait déjà $P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1^{-1} & * \quad * \\ \hline 0 & \\ 0 & Q^{-1} \end{array}\right)$ où $Q = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$)

Soit $n \in \mathbb{N}$ $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i^n & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^n \end{pmatrix}$