(37) CCINP 2019

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad \boxed{A^2 - 4A} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \boxed{-4I_3}$

On a alors $A^2 - 4A + 4I_3 = 0_3$.

Ainsi, $X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$ est polynôme annulateur de A.

Et $\Pi_A \subset \{\cancel{X-2}, (X-2)^2\}$ $\quad$ donc $\Pi_A = (X-2)^2$

$A - 2I_3 \neq 0_3$ $\quad$ et comme $SpA = \mathcal{Z}(\Pi_A)$, 2 est l'unique vp de A.

A admet une unique vp et n'est pas une matrice scalaire donc A non diagonalisable

Et 0 n'est pas vp donc A inversible

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq 2$.

$\exists (Q,R) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ tq $X^n = (X-2)^2 Q(X) + R$ avec $R = aX + b$ (1)

et on a, sa dérivée : $nX^{n-1} = 2(X-2)Q(X) + (X-2)^2 Q'(X) + a$ (2)

Puis, on évalue (1) et (2) en 2 :

(1) : $2^n = 0 + 2a + b$ $\quad$ donc on obtient : $a = n2^{n-1}$

(2) : $n2^{n-1} = 0 + 0 + a$ $\quad$ $b = 2^n - 2n2^{n-1} = 2^n(1-n)$

d'où $\boxed{R = n2^{n-1}X + 2^n(1-n)}$

3) $A^n = \underbrace{(A-2)^2}_{0} Q(A) + R(A) = \boxed{n2^{n-1}A + 2^n(1-n)I_3 = A^n}$

4) $n = 0$: $0 + I_3 = A^0$: ok

$n = 1$: $A + 0 = A^1$: ok

$n = -1$: $\left(-\frac{1}{4}A + I_3\right) \times A = -\frac{1}{4}A^2 + A$ $\;\neq I_3$ ce qui permet de conclure

$A^{-1} \times A = I_3$ $\quad$ (A étant inversible Q1)

on multipliant par 4 les deux expressions, on retombe sur l'égalité de la Q1 : $-A^2 + 4A = 4I_3$

Donc l'expression est tjrs vraie pour $n \in \{-1, 0, 1\}$.

Raisonnement douteux.