33) Soit $n \geq 1$

But : $n = \mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, A^2 = \dots = \mathrm{tr}\, A^n \iff \mathrm{Sp}\, A = \{1\}$

($\Leftarrow$) Si $\mathrm{Sp}\, A = \{1\}$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc A est trigonalisable donc on a $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$ tq :

$A = PTP^{-1}$

Or $\mathrm{Sp}\, A = \{1\}$ donc $T = \begin{pmatrix} 1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$

On a : $\mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, T = n$.

Puis $A^2 = PT^2P^{-1}$ avec $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & & (*') \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$

Donc $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(T^2) = n$.

De même, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(T^k) = n$.

Donc $\boxed{\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = \dots = \mathrm{tr}(A^n)}$ $= n \ (= \mathrm{tr}\, A^0)$

($\Rightarrow$) Si $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = \dots = \mathrm{tr}(A^n) = n \geq 1$

Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$, soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les ~~vp~~ valeurs propres distinctes de A
$m_1, \dots m_p$ leur multiplicité

On a alors : $(S) \begin{cases} m_1 + \dots + m_p = n \\ m_1\lambda_1 + \dots + m_p\lambda_p = n \\ \vdots \\ m_1\lambda_1^{p-1} + \dots + m_p\lambda_p^{p-1} = n \\ m_1\lambda_1^p + \dots + m_p\lambda_p^p = n \end{cases}$ ie $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & & & & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & & & & \lambda_p^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & & & & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}}$ $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$

Pour être exact, ceci désigne le déterminant. $= V(\lambda_1, \dots \lambda_p)$ de déterminant non nul car les λ_i sont distincts

Donc (S) admet une unique solution.

On a aussi : $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & & | \\ | & & \\ \lambda_1^{p-1} & & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1\lambda_1 \\ \vdots \\ m_p\lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$

donc $\forall i \in [\![1; p]\!]$, $\begin{cases} m_i\lambda_i = m_i \\ m_i \neq 0 \end{cases}$

On a alors $\lambda_1 = 1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p$ donc il n'y a qu'une seule valeur propre de multiplicité n qui est 1.
ie : $p = 1$

$\boxed{\text{Donc } \mathrm{Sp}(A) = \{1\}}$

Scanné avec CamScanner