Exercice 3

Greg Depoire–Ferrer

20 mai 2022

a, b et c sont les trois racines complexes de

$$P = X^3 + X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$$

On a donc

$$\begin{aligned} a^3 + a^2 + 1 &= 0 \\ a^3 &= -a^2 - 1 \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} b^3 &= -b^2 - 1 \\ c^3 &= -c^2 - 1 \end{aligned}$$

a, b et c sont de plus distinctes. En effet, si P possédait une racine au moins double, elle serait racine de

$$P' = 3X^2 + 2X = 3X\left(X + \frac{2}{3}\right)$$

par caractérisation de l'ordre des racines d'un polynôme. Or

$$\begin{aligned} P(0) &= 1 \neq 0 \\ P\left(-\frac{2}{3}\right) &= \frac{31}{27} \neq 0 \end{aligned}$$

donc P ne possède que des racines simples.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

$$(x, y, z) \text{ solution de } (S) \iff \left\{ \begin{array}{l} x + ay + a^2 z = a^4 \\ x + by + b^2 z = b^4 \\ x + cy + c^2 z = c^4 \end{array} \right.$$

Or

$$\begin{aligned} a^4 &= a \times a^3 \\ &= a(-a^2 - 1) \\ &= -a^3 - a \\ &= a^2 + 1 - a \end{aligned}$$

donc

$$x + ay + a^2 z = a^4 \iff x + a(y+1) + a^2(z-1) = 1$$

et de même pour b et c.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \text{ solution de } (S) &\iff \left\{\begin{array}{l} x + a(y+1) + a^2(z-1) = 1 \\ x + b(y+1) + b^2(z-1) = 1 \\ x + c(y+1) + c^2(z-1) = 1 \end{array}\right. \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x + a(y+1) + a^2(z-1) = 1 \\ (b-a)(y+1) + (b^2-a^2)(z-1) = 1 \\ (c-a)(y+1) + (c^2-a^2)(z-1) = 1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x + a(y+1) + a^2(z-1) = 1 \\ (b-a)(y+1) + (b-a)(b+a)(z-1) = 0 \\ (c-a)(y+1) + (c-a)(c+a)(z-1) = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x + a(y+1) + a^2(z-1) = 1 \\ y + 1 + (b+a)(z-1) = 0 \\ y + 1 + (c+a)(z-1) = 0 \end{array}\right. \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x + a(y+1) + a^2(z-1) = 1 \\ y + 1 + (b+a)(z-1) = -1 \\ (c-b)(z-1) = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x + a(y+1) + a^2(z-1) = 1 \\ y + 1 + (b+a)(z-1) = 0 \\ z = 1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x + a(y+1) + a^2(z-1) = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions du système (S) est donc

$$\{(1,-1,1)\}$$