

correction n° 29

1) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tq $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$

donc f nilpotente, par caractérisation f est triangulaire et

$S_C(f) \neq \{0\}$ d'où l'existence d'une base B telle que la matrice de

f soit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Non, cela donne une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ seulement.

montrons que $(a, f(a), f^2(a))$ est une base adaptée. a ?

En effet, $f^2 \neq 0$ donc on a $a \neq 0$ tq $f^2(a) \neq 0$

soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq $\lambda_1 a + \lambda_2 f(a) + \lambda_3 f^2(a) = 0$

But: ~~mq~~ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$f(\lambda_1 a + \lambda_2 f(a) + \lambda_3 f^2(a)) = \lambda_1 f(a) + \lambda_2 f^2(a) + \lambda_3 \underbrace{f^3(a)}_{=0}$$

donc $\lambda_1 f(a) + \lambda_2 f^2(a) = 0$

ainsi $f(\lambda_1 f(a) + \lambda_2 f^2(a)) = \lambda_1 f^2(a) + \lambda_2 \underbrace{f^3(a)}_{=0} = 0$

donc $\lambda_1 f^2(a) = 0$ or $f^2(a) \neq 0$ donc $\lambda_1 = 0$

$$\lambda_2 f(a) + \lambda_3 f^2(a) = 0$$

donc $\lambda_2 f^2(a) + \lambda_3 f^3(a) = 0 \xrightarrow{\text{réduction}} \lambda_2 f^2(a) = 0$ or $f^2(a) \neq 0$ donc $\lambda_2 = 0$

et donc $\lambda_3 f^2(a) = 0$ or $f^2(a) \neq 0$ donc $\lambda_3 = 0$

Ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc $(a, f(a), f^2(a))$ famille libre de dimension 3

donc est une base

Et la matrice de f dans cette base a bien la forme voulue

$$2) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= T}$$

$I_3 T = T I_3$ donc commutent aussi

$$B^n = (T + I_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T^k I_3^{n-k}$$

or $\forall k \geq 3$ avec $k \in \mathbb{N}$ $T^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

$$\begin{aligned} \text{ains } B^n &= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} T^k = I_3 + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n!}{(n-2)! 2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3) \text{ soit } X_{n+1} = \begin{pmatrix} \mu_{n+1} \\ \nu_{n+1} \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix} \text{ et } X_n = \begin{pmatrix} \mu_n \\ \nu_n \\ \omega_n \end{pmatrix}$$

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_n \\ \nu_n \\ \omega_n \end{pmatrix} \quad \text{au système.}$$

$$= B X_n$$

$$\begin{aligned} \text{ains } X_n &= B^n X_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \mu_n = n + \frac{n(n-1)}{2} = \dots$$

$$\nu_n = 1 + n$$

$$\omega_n = 1$$

Vérification : $\omega_0 = \omega_1 = 1$

$$\mu_0 = 0$$

$$\nu_0 = 0$$