Exercice 28 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $A^3 = O_n$

1) $I_n + A$ inversible ?

On utilise le fait que A est nilpotente ~~d'autre~~ d'ordre au plus 3 :

On peut aussi penser à une somme géométique

$A^2$ et $I_n + A$ commutent car A commute avec A et $I_n$

(polynômes en A)

et $A^2(I_n+A) = (I_n+A)A^2 = A^2 + A^3 = A^2$

$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$

On veut annuler $A^2$ et obtenir $I_n$.

or $(I_n - A)(I_n+A) = I_n - A^2$

et se dire qu'il est raisonnable de penser que

et $(I_n - A)(I_n+A) = (I_n+A)(I_n-A)$

$(I_n+A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k A^k$

$= I_n - A + A^2$

puis le vérifier

d'où $(I_n+A)(A^2+I_n-A) = (A^2+I_n-A)(I_n+A)$

car $A^2, A, I_n$ commutent avec A (polynômes en A)

et $(I_n+A)(A^2-A+I_n) = A^2 - A + I_n + A^3 - A^2 + A$

$= I_n$

d'où $A + I_n$ inversible. d'inverse $(A^2 - A + I_n)$

2) Soit $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ $A^3 = O_n$

et $AB = BA$.

$A + B$ inversible.

On veut faire apparaître le cas de la question précédente

Plutôt que refaire les calculs de la qu. précédente, il vaut mieux l'utiliser :

$A + B = B(B^{-1}A + I_n)$

$AB = BA$ donc $A = BAB^{-1}$

puis $B^{-1}A = AB^{-1}$

$(B^{-1}A)^3 = (B^{-1})^3 A^3 = O_n$ donc $B^{-1}A = AB^{-1}$

car $B^{-1}$ et A commutent

donc $B^{-1}A + I_n$ inv. d'inverse $I_n - B^{-1}A + (B^{-1}A)^2$

donc

On remarque que $(A+B)A^2B^{-1} = (B^{-1}A + I_n)BB^{-1}A^2$

$= \underbrace{B^{-1}A^3}_{=O_n} + A^2$

et $(A+B)(-A+B) = -A^2 + AB - BA + B^2$

$= B^2 - A^2$ car $AB = BA$.

$A+B = B(B^{-1}A + I_n)$ l'est et

$(A+B)^{-1} = (B^{-1}A + I_n)^{-1} B^{-1} = [I_n - B^{-1}A + (B^{-1})^2 A^2] B^{-1} = B^{-1} - (B^{-1})^2 A + (B^{-1})^3 A^2.$

Ainsi $(A+B)(A^2B^{-1} - A + B)$

$= A^3B^{-1} - A^2 + AB + A^2 - BA + B^2$

$= 0_n + B^2$

Ainsi $(A+B)(A^2B^{-1} - A + B)B^{-2} = I_n$

d'où $(A+B)(A^2B^{-3} - AB^{-2} + B^{-1}) = I_n$

donc $(A+B)$ inversible. d'inverse $(A^2B^{-3} - AB^{-2} + B^{-1})$

On a la commutativité car $B, B^{-1}A, A^2, B^{-2}, B^{-1}$ commutent avec $A$.