Exercice 26 :

$$\Delta_{n+2} = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{n+2}$$

$$\underset{\text{dvpt } \% C_n}{=} 2\cos\theta\, \Delta_{n+1} + (-1)^{2n+1} \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & & & (0) \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & 1 & 2\cos\theta \; 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \; 1 \end{vmatrix}_{n}$$

$$\underset{\text{dvp } \% L_n}{=} 2\cos\theta\, \Delta_{n+1} - \Delta_n$$

donc équation caractéristique : $r^2 - 2\cos\theta\, r + 1 = 0$

$$\Delta = 4(\cos^2 - 1)$$
$$= -4\sin^2\theta$$

donc $r = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$

donc $\Delta_n = A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)$

Avec l'argument habituel à savoir donner, ou tiré de $\Delta_2 = 2\cos\theta\, \Delta_1 - \Delta_0$

avec $\begin{cases} \Delta_0 = 1 = A \\ \Delta_1 = \cos\theta = A\cos\theta + B\sin\theta \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

donc $\begin{cases} A = 1 \\ B \sin\theta = 0 \end{cases}$

Si $\theta \neq 0 (\pi)$. $B = 0$

donc $\Delta_n = \cos(n\theta)$

Si $\theta = 0 (\pi)$; on a $\Delta_n = \cos(n\theta)$ car $\sin(n\theta) = 0$

donc $\boxed{\Delta_n = \cos(n\theta)}$

Scanné avec CamScanner