HOUZÉ
Hugo
MP1

Correction Exercice $\boxed{20}$

$$D_{n+2} = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{dvp \% } C_1}{=} (-1)^{1+1}(a+b)\, D_{n+1} + (-1)^{1+2} 1 \begin{vmatrix} ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)\, D_{n+1} - ab\, D_n$$

On reconnait l'expression d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2:

$$(E_r) : r^2 - (a+b)r + ab = 0$$
$$(r-a)(r-b) = 0$$

• <u>Si $a \neq b$:</u> $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

Or $D_1 = |a+b| = a+b$, $D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - ab = a^2+ab+b^2$

donc $\begin{cases} a+b = \lambda a + \mu b \\ a^2+ab+b^2 = \lambda a^2 + \mu b^2 \end{cases}$ On peut étendre à $D_0 = 1$.

<u>Si $a \neq 0$</u>

M mauvais réflexe. Préférez des opérations sur les équations, ce qui évite d'avoir à traiter des cas particuliers inutilement.

donc $\begin{cases} \lambda = 1 + (1-\mu)\frac{b}{a} \\ a^2+ba+b^2 = a^2 + (1-\mu)ab + \mu b^2 \end{cases}$

Bricolage

donc $\begin{cases} \lambda = 1 + (1-\mu)\frac{b}{a} \\ \mu(ab-b^2) = -b^2 \end{cases}$

donc $\begin{cases} \lambda = 1 + \left(1-\left(1-\frac{b}{a}\right)\right)\frac{b}{a} = 1 + \frac{b^2}{a^2} \\ \mu = \frac{-b^2}{ab-b^2} = 1 - \frac{b}{a} \end{cases}$

ok car $a \neq b$

Non $D_2 \neq a^2+ab+b^2$

donc $\boxed{\cancel{D_n = \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)a^n + \left(1-\frac{b}{a}\right)b^n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*}$

<u>Si $a=b$</u> : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $D_n = (\lambda + n\mu)a^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

Or $D_1 = |2a| = 2a$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 2a & a^2 \\ 1 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2$

donc $\begin{cases} 2a = (\lambda+\mu)a \\ 3a^2 = (\lambda+2\mu)a^2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$

donc $\boxed{D_n = (n+1)a^n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*}$

<u>Si $a \neq b$ et $a=0$</u> $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $D_n = \mu b^n$ avec $\mu \in \mathbb{C}$

Or $D_1 = |b| = b$

donc $b' = \mu b$ et $\mu = 1$

donc $\boxed{D_n = b^n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*}$