198)

$(X=k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événement

Soit $i \in [\![2, n+2]\!]$, avec la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(X+Y=i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big((X=k) \wedge (X+Y=i)\big)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k \wedge Y=i-k)$$

X et Y sont indépendantes $\rightarrow$ $= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=i-k)$

Si $k \geq i$, $\mathbb{P}(Y=i-k) = 0$

donc
$$\mathbb{P}(X+Y=i) = \sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=i-k)$$

$$= \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{n^2} = \frac{i-1}{n^2}$$

2) $(X=k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événement

Soit $i \in [\![n+2, 2n]\!]$

D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X+Y=i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k \wedge X+Y=i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k \wedge Y=i-k)$$

on doit avoir $i-k \leq n$ car Y suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ donc $i \leq n+k$

donc $n \geqslant k \geqslant i-n$

d'où $$\mathbb{P}(X+Y=i) = \sum_{k=i-n}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=i-k)$$

(X et Y sont indépendants)

$$= \sum_{k=i-n}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{2n-i+1}{n^2}$$

3) $(X+Y=k)_{k \in [\![2, 2n]\!]}$ est un système complet d'événements,

$$(X+Y=2) = \bigsqcup_{k=2}^{2n} (X+Y=k) \cap (Z=k)$$

donc $$\mathbb{P}(X+Y=2) = \sum_{k=2}^{2n} \mathbb{P}((X+Y=k) \cap (Z=k))$$

par total

(d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X+Y=2) = \sum_{k=2}^{2n} \mathbb{P}(Z=k \mid X+Y=k)\, \mathbb{P}(X+Y=k)$$

$$= \sum_{k=2}^{2n} \mathbb{P}(Z=k)\, \mathbb{P}(X+Y=k)$$

$X+Y$ et Z sont indépendants d'après le lemme des coalitions

Si $k > n$, $\mathbb{P}(Z=k) = 0$, donc

$$\mathbb{P}(X+Y=2) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(Z=k)\, \mathbb{P}(X+Y=k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2}$$

donc $$\boxed{\mathbb{P}(X+Y=2) = \frac{n-1}{2n^2}}$$

4) $(X+Y=k)_{k \in [\![2, 2n]\!]}$ est un système complet d'événement

Soit $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}(X+Y+Z=n) = \sum_{k=2}^{2n} \mathbb{P}((X+Y+Z=n) \cap (X+Y=k))$$

$$= \sum_{k=2}^{2n} \mathbb{P}(Z=n-k \cap X+Y=k)$$

$$= \sum_{k=2}^{2n} \mathbb{P}(Z=n-k)\,\mathbb{P}(X+Y=k)$$

Z et $X+Y$ sont indépendants d'après le lemme des coalitions

Si $k \geq n$, $\mathbb{P}(Z=n-k)=0$

Non

donc $$\mathbb{P}(X+Y+Z=n) = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{n^2} \times \frac{k-1}{n^2}$$

$$= \frac{(n-2)(n-1)}{2n^3}$$