Ex 189

Soit $f : \begin{array}{|l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^4 + y^3 - 3y - 2 \end{array}$

$\mathbb{R}^2$ est un ouvert. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

Les points critiques sont donc $(0,1)$ et $(0,-1)$.

$$\begin{aligned} f(h, 1+k) - f(0,1) &= h^4 + (1+k)^3 - 3(1+k) \cancel{-2} - 1 + 3 \cancel{+2} \\ &= h^4 + 3k^2 + k^3 \\ &= h^4 + k^2(3+k) \underset{(h,k)\to 0}{\sim} h^4 + 3k^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Pour (h,k) proche de $(0,0)$, on a $h^4 + k^2(3+k) \geq f(0,1)$
Donc $(0,1)$ est un minimum local de f.

$$\begin{aligned} f(h, k-1) - f(0,-1) &= h^4 + (k-1)^3 - 3(k-1) \cancel{-2} - \left((-1)^3 + 3 \cancel{-2}\right) \\ &= h^4 + k^3 - 3k^2 \cancel{+3k} \cancel{-1} \cancel{-3k} \cancel{+3} \cancel{+2} \\ &= h^4 + k^2(\underbrace{k-3}) \end{aligned}$$

écrivez plutôt $-3+k$ car $k \underset{k\to 0}{=} o(1)$

Nous allons montrer que $(0,-1)$ n'est pas un extremum, en utilisant des suites.

$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}-1\right) = \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n} - 3\right) \sim \frac{-3}{n^2} \leq 0$

$f\left(\frac{1}{\ln(n)}, \frac{1}{n}-1\right) = \frac{1}{\ln^4(n)} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n} - 3\right) \sim \frac{1}{\ln^4(n)} \geq 0$

Plus simplement,
$f(h,-1) = h^4 \geq 0$
$f(0,k-1) = -3k^2 + k^3 \sim -3k^2 \leq 0$

donc $(0,1)$ est un point selle