Exercice 14 : Mines-Telecom 2019

Pour trouver le nombre de zéro dans l'écriture décimale de l'entier 2022 ! il suffit de trouver la valuation 5 adique de 2022 ! Pourquoi ?

$$v_5(2022!) = \underbrace{\left\lfloor \frac{2022}{5} \right\rfloor}_{\text{multiple de } 5} + \underbrace{\left\lfloor \frac{2022}{5^2} \right\rfloor}_{\text{multiple de } 5^2} + \underbrace{\left\lfloor \frac{2022}{5^3} \right\rfloor}_{\text{multiple de } 5^3} + \underbrace{\left\lfloor \frac{2022}{5^4} \right\rfloor}_{\text{multiple de } 5^4}$$

Explication succinte !

On s'arrête aux multiples de 5^4 car $5^5 > 2022$

Donc :

$$v_5(2022!) = 404 + 80 + 16 + 3$$
$$\boxed{= 503}$$

Vous avez vérifié avec python ?

Il y a donc 503 zéros à la fin de l'écriture décimale de l'entier naturel 2022 !.

Autre argument possible : le nombre de facteur de valuation 5-adique égale à k est $a_k - a_{k+1}$ où $a_k = \left\lfloor \frac{2022}{5^k} \right\rfloor$

donc $v_5(2022!) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k - \sum_{k=0}^{+\infty} k\, a_{k+1}$ (sommes finies)

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k - \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$