Exercice 138

1. **Convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
   - $f_n(0) = \cos^n(0)\sin(0) = 0 \to 0$
   - $f_n(\pi) = \cos^n(\pi)\sin(\pi) = 0 \to 0$
   - Si $x \in]0,\pi[$, $|\cos(x)| < 1$ donc $|f_n(x)| \leq |\cos(x)|^n \times 1 \to 0$
     et $f_n(x) \to 0$.

   Donc $f_n \xrightarrow{\cancel{CU}} \tilde{0}$.

   Convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,\pi]$.
   On calcule $\|f_n - \tilde{0}\|_\infty = \sqrt{\|f_n^2\|_\infty}$ (justifié par la suite).
   $f_n^2(x) = \cos^{2n}(x)\sin^2(x) = \cos^{2n}(x) - \cos^{2n+2}(x)$
   f_n^2 est dérivable sur $[0,\pi]$ et

   Bonne idée !
   On aurait aussi pu étudier directement f_n sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ (pour symétrie avec $x \mapsto \pi - x$), les annulations de f_n' font apparaître de l'arctangente, ensuite, il faut faire un peu de trigo...

$$\left(f_n^2\right)'(x) = -\sin(x)\left[2n\cos^{2n-1}(x) - (2n+2)\cos^{2n+1}(x)\right]$$

   Soit $x \in]0,\pi[$ un extremum local de f_n^2.
   D'après la condition nécessaire d'extremum local, $\left(f_n^2\right)'(x) = 0$ donc avec $\sin(x) \neq 0$,

$$2n\cos^{2n-1}(x) = (2n+2)\cos^{2n+1}(x)$$

   Soit $x = \frac{\pi}{2}$ et $f_n^2(x) = 0$,
   soit $x \in]0,\pi[\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$ et $\cos(x) \neq 0$ donc

$$\cos^2(x) = \frac{2n}{2n+2} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} f_n^2(x) &= \cos^{2n}(x) - \cos^{2n+2}(x) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

   On a donc

$$\begin{aligned} \|f_n^2\|_\infty &= \max\left\{f_n^2(0), f_n^2(\pi), f_n^2\left(\frac{\pi}{2}\right), \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} \\ &= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

   Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \times \frac{1}{n} \\ &= \exp\left(n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \times \frac{1}{n} \\ &= \exp(1 + o(1)) \times \frac{1}{n} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

   Donc $\|f_n^2\|_\infty \to 0$.
   Montrons que $\|f_n - \tilde{0}\|_\infty = \sqrt{\|f_n^2\|_\infty}$ par caractérisation séquentielle du sup :
   On a $M \geq 0$ minorant de $\left\{|f_n^2(x)| : x \in [0,\pi]\right\}$ et $(x_k)_k$ telle que $|f_n^2(x_k)| \to M$.
   On a donc $f_n^2(x_k) \to M$ puis par continuité de $\sqrt{\cdot}$, $f_n(x_k) \to \sqrt{M}$.
   De plus, $\sqrt{M}$ est un minorant de $\{|f_n(x)| : x \in [0,\pi]\}$ par croissance de $x \mapsto x^2$.
   Donc par caractérisation séquentielle du sup, $\|f_n - \tilde{0}\|_\infty = \sqrt{\|f_n^2\|_\infty}$.
   Donc $\|f_n - \tilde{0}\|_\infty \to 0$ par continuité de $\sqrt{\cdot}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.

   Cela revient à montrer que $\|f_n^2\|_\infty = \|f_n\|_\infty^2$, ce qui vient de la croissance de $x \mapsto x^2$.

2. **Convergence simple de** $\sum_{n=0} f_n$ **sur** $[0, \pi]$:

$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(0) = f_n(\pi) = 0$ donc $\sum_{n=0} f_n(0)$ et $\sum_{n=0} f_n(\pi)$ convergent et leur somme vaut 0.

Si $x \in]0, \pi[, |\cos(x)| < 1$ donc
$\sum_{n=0} \cos^n(x)\sin(x)$ converge comme somme géométrique et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$$

Donc $\forall x \in [0, \pi]$,

$$\sum_{n=0} f_n \xrightarrow{\cancel{CU}} S : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \{0, \pi\} \\ \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)} & \text{si } x \in]0, \pi[\end{cases}$$

et S **est bien définie sur** $[0, \pi]$.
S **n'est pas continue** car $S(0) = 0$ et

$$S(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x} \underset{x \to 0}{\to} +\infty \neq 0$$

Convergence uniforme de $\sum_{n=0} f_n$ **sur** $[0, \pi]$:

S'il y avait convergence uniforme sur $[0, \pi]$, alors comme les f_n sont continues sur $[0, \pi]$, on aurait la continuité de S par théorème de transfert. Ce n'est pas le cas donc par l'absurde, il n'y a pas convergence uniforme.

Convergence normale de $\sum_{n=0} f_n$ **sur** $[0, \pi]$:

Il n'y a pas convergence normale sur $[0, \pi]$ donc pas convergence normale.