$\boxed{124}$ Soit $n \geq 2$

1. $t \longmapsto t\ln(t)$ est continue, croissante sur $[2;+\infty[$ donc par comparaison série intégrale, on a

$$\int_2^n t\ln(t)\,dt + n\ln(n) \leq \sum_{k=2}^{n} k\ln(k) \leq \int_2^n t\ln(t)\,dt + \cancel{1\times\ln(1)}$$

2 ln 2

Faites un dessin !

or $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[2;+\infty[$ donc par IPP,

$$\int_2^n t\ln(t)\,dt = \left[\frac{t^2\ln(t)}{2}\right]_2^n - \int_2^n \frac{t}{2}\,dt$$

$$= \frac{n^2\ln(n)}{2} - \frac{4\ln(2)}{2} - \left[\frac{t^2}{4}\right]_2^n$$

Ainsi $\displaystyle\int_2^n t\ln(t)\,dt = \frac{n^2\ln(n)}{2} - \frac{n^2}{4} - 2\ln(2) + 1$

or $\displaystyle\frac{n^2}{4} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{n^2\ln(n)}{2}\right)$ car $\displaystyle\frac{n^2}{4} \times \frac{2}{n^2\ln(n)} = \frac{1}{2\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

de même, $\displaystyle 2\ln(2) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{n^2\ln(n)}{2}\right)$ ~~et~~ $\displaystyle n\ln(n) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{n^2\ln(n)}{2}\right)$

Ainsi par encadrement, $\cancel{S_n =}$ $\displaystyle S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2\ln(n)}{2}$

donc on a aussi $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2 \ln(n)}$

Si $n \geq 3$,

$2, 0 \leq \frac{2}{n^2 \ln(n)} \leq \frac{2}{n^2}$ qui est un TGSCV par Riemann ainsi

par CSTGP $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge