(119)

1)a) Montrons par récurrence : " $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ ". (HR)

* $n=0$: $u_0 = 1 > 0$, vraie pour $n=0$.

* Supposons pour $n \in \mathbb{N}$ fixé (HR) vraie.

On a : $u_{n+1} = \underbrace{\frac{n+a}{n+b}}_{>0} \underbrace{u_n}_{>0} > 0$ or (HR) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

d'où l'hypothèse vraie au rang $n+1$.

$\boxed{\text{d'où par récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0}$

1) b) $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} - x_n = \ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n)$

$= \alpha \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

$= \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

Or $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b} = \frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{b}{n}}$

d'où : $x_{n+1} - x_n = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{b}{n}\right)$

$= \alpha \times \frac{1}{n} + \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc $x_{n+1} - x_n = \frac{\alpha + a - b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

On a $\sum_{n \geq 1} (x_{n+1} - x_n)$ converge si $\alpha = b - a$. POURQUOI ?

2) Avec la 1b) on a $\cancel{\sum}(x_n)_n = \cancel{\sum}(\ln(n^\alpha u_n))_n$ qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. avec $\alpha = b - a$.

hey ! Non !

Mélange suite - série.

~~Or~~ en composant par l'exponentielle, $\cancel{\sum}(n^\alpha u_n)_n$ converge vers $A = e^\ell$

d'où $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha} = \frac{A}{n^{b-a}}$

donc $\sum u_n$ converge si $b - a > 1$.