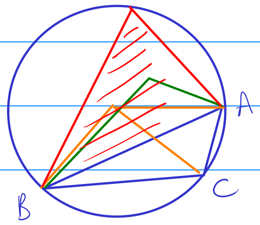
32 Déterminer les triangles d'aire maximale inclus dans un cercle donné.

$f : (\theta, \varphi) \longmapsto$ aire du triangle ABC.

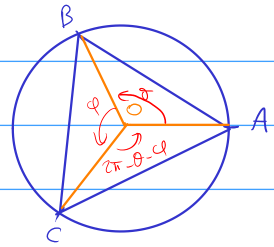


Le maximum éventuel se réalise pour

$\theta \in [0;\pi]$

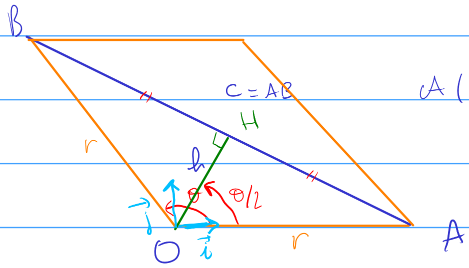
$\varphi \in [0;\pi]$

$0 \leq 2\pi - \theta - \varphi \leq \pi$ ie $\pi \leq \theta + \varphi \ (\leq 2\pi)$



Soit $K = \{(\theta,\varphi) \in [0;\pi]^2 ;\ \theta + \varphi \geq \pi\}$

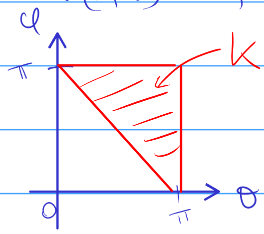
$\forall (\theta,\varphi) \in K,\quad f(\theta,\varphi) = \mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(OAB) + \mathcal{A}(OBC) + \mathcal{A}(OCA)$.



$\mathcal{A}(OAB) = \frac{1}{2} \times r\cos\frac{\theta}{2} \times 2r\sin\frac{\theta}{2} = r^2 \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{r^2}{2}\sin\theta$

Mieux : $\mathcal{A}(OAB) = \frac{1}{2}\left|[\vec{OA}, \vec{OB}]\right| = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} r & r\cos\theta \\ 0 & r\sin\theta \end{vmatrix} \right| = \frac{r^2}{2}\underbrace{|\sin\theta|}_{\geq 0}$

$\forall (\theta,\varphi) \in K,\quad f(\theta,\varphi) = \frac{r}{2}\left[\sin\theta + \sin\varphi + \sin(2\pi - \theta - \varphi)\right] = \frac{r^2}{2}\left[\sin\theta + \sin\varphi - \sin(\theta+\varphi)\right]$.



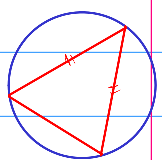
K fermé borné en df donc compact, $f \in \mathcal{C}^0(K)$

donc f atteint (un min et) un max globaux sur K.

Sur $\mathring{K}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathring{K})$ et $\forall (\theta,\varphi) \in \mathring{K}$, $\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta,\varphi) = \frac{r^2}{2}(\cos\theta - \cos(\theta+\varphi))$

$\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\theta,\varphi) = \frac{r^2}{2}(\cos\varphi - \cos(\theta+\varphi))$

Pts critiques : $\cos\theta = \cos(\theta+\varphi) = \cos\varphi$. ie $\left|\begin{array}{l}\theta \equiv \varphi\ (2\pi) \\ \text{ou} \\ \theta \equiv -\varphi\ (2\pi)\end{array}\right.$ et $\left|\begin{array}{l}\theta \equiv \theta+\varphi\ (2\pi) \\ \text{ou} \\ \theta \equiv -(\theta+\varphi)\ (2\pi)\end{array}\right.$



Si $\theta \equiv \theta + \varphi\ (2\pi)$, $\varphi \equiv 0\ (2\pi)$: triangle plat d'aire nulle.

Si $\theta \equiv -\varphi\ (2\pi)$, $\theta + \varphi \equiv 0\ (2\pi)$: idem.

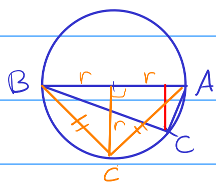
Si $\theta \equiv \varphi\ (2\pi)$ et $\theta \equiv -(\theta+\varphi)\ (2\pi)$ alors $3\theta \equiv 0\ (2\pi)$ donc $\theta \equiv 0\ (\frac{2\pi}{3})$

donc $\theta = \frac{2\pi}{3} = \varphi = 2\pi - (\theta + \varphi)$: triangle équilatéral

$f(\theta,\varphi) = \frac{r^2}{2}\left(3 \times \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$.

Sur $Fr(K)$, $\theta = \pi$ ou $\varphi = \pi$ ou $\theta + \varphi = \pi$.

aire maximale $= \max\limits_{(\theta,\varphi) \in Fr(K)} f(\theta,\varphi) = r^2$.



base fixe

aire max pour hauteur max

Or $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 > r^2$ car $(3\sqrt{3})^2 = 27 > 4^2 = 16$ donc le pt critique $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ ne peut être que le max global de f.

$\max\limits_K f = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$ atteint pour tout triangle équilatéral.

Exo Centrale-Mines : triangles d'aire max dans une ellipse.

↑ image d'un cercle par une affinité ⊥ $g : (x,y) \mapsto (x, \frac{b}{a}y)$