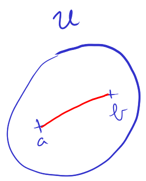
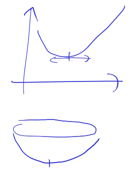
31 Soit $\mathscr{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathscr{U} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, convexe (la définition est la même que pour les fonctions d'une variable). Montrer que tout point critique est un minimum global.



Soit $a, b \in \mathcal{U}$, $t \in [0,1]$

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + t f(b)$$

Soit a tel que $df(a) \equiv 0$ **but :** a min global



Or $f(a + t(b-a)) - f(a) \leq t[f(b) - f(a)]$

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} D_v f(a).$$

Si $t > 0$, $\dfrac{f(a+t(b-a)) - f(a)}{t} \leq f(b) - f(a)$

$$\Big\downarrow t \to 0^+$$

$$D_v f(a) = df(a)(v) = 0$$

Donc $f(b) - f(a) \geq 0$: $\forall b \in \mathcal{U}$, $f(a) \leq f(b)$:

$\boxed{f \text{ réalise un minimum global en } a.}$