chapitreXXXI

Arcs paramétrés

Dans ce chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Soit $(E, \|\|_E)$ un K-espace vectoriel de dimension $n = 2$.

1 Définition

Définition : Arc paramétré, support

On appelle **arc paramétré** de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans E tout coupe (I, f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $f \in \mathscr{C}^1(I, E)$.

L'ensemble $\Gamma = \{f(t), t \in I\}$ est appelé **support** de l'arc paramétré (I, f) (ou **courbe**).

On dit que (I, f) est un paramétrage de cette courbe.

2 Régularité

Définition

Soit (I, f) un arc paramétré. On dit que le point M de paramètre t est ***régulier*** lorsque $f'(t) \neq 0_E$. Dans le cas contraire, M est dit ***singulier*** ou ***stationnaire***.

L'arc est dit ***régulier*** lorsque tous ses points le sont.

3 Étude locale, tangente

Définition : demi-tangentes

Soit (I, f) un arc paramétré, $M_0 = f(t_0)$ un point de paramètre $t_0 \in \mathring{I}$, et $M(t) = f(t)$ un point de paramètre t distinct de M_0. On suppose qu'au voisinage (strict) de t_0, $f(t) \neq f(t_0)$.

On appelle ***demi-tangente à gauche*** (resp. ***demi-tangente à droite***) à l'arc en M_0, lorsqu'elle existe, la demi-droite passant par M_0 ayant pour vecteur directeur la limite de $\dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{M_0M(t)}\right\|}\overrightarrow{M_0M(t)}$ lorsque t tend vers t_0 à gauche (resp. à droite).

On parle de ***tangente*** en M_0 lorsque les deux demi-droites sont contenues dans la même droite.

Propriété

Soit (I, f) un arc paramétré, $M_0 = f(t_0)$ un point de paramètre $t_0 \in \mathring{I}$ régulier. I

I y a une tangente en M_0 dirigée par $f'(t_0)$.

4 Plan d'étude d'un arc paramétré plan

Méthode : Plan d'étude d'un arc paramétré plan

On étudie l'arc paramétré $t \mapsto f(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$.

1. Domaine de définition de f donc de x **et** y. En général une réunion d'intervalles.
2. Réduction du domaine d'étude : effets géométrique de transformations $t \mapsto -t$, $t \mapsto \frac{1}{t}$, $t \mapsto t+T$, $t \mapsto T-t$, etc.
3. Étude de la classe $\mathscr{C}^1$, variations conjointes de x et y.
4. Tangente en des points particuliers.
5. Tracé.