chapitreXXXI

Arcs paramétrés

Extrait du programme officiel :

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie E.

Contenus	Capacités & commentaires
Arcs paramétrés	
Arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans E. Paramètre régulier.	Interprétation géométrique de la dérivée : tangente en un point associé à un paramètre régulier.
Exemples simples d'arcs paramétrés plans.	Les étudiants doivent savoir déterminer la tangente et la normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier. L'étude des points stationnaires, des courbes asymptotes et des arcs définis par une équation polaire est hors programme. La pratique du tracé des arcs paramétrés n'est pas un objectif du programme. ⇆ I : réalisation de tracés à l'aide de l'outil informatique.

Table des matières

XXXI Arcs paramétrés

Dans ce chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.
Soit $(E, \|\|_E)$ un K-espace vectoriel de dimension $n = 2$.

1 Définition

Définition : Arc paramétré, support

On appelle **arc paramétré** de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans E tout coupe (I, f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $f \in \mathscr{C}^1(I, E)$.

L'ensemble $\Gamma = \{f(t), t \in I\}$ est appelé **support** de l'arc paramétré (I, f) (ou **courbe**).

On dit que (I, f) est un paramétrage de cette courbe.

Remarque

Représentation géométrique lorsque $E = \mathbb{R}^2$, $f : t \in I \mapsto (x(t), y(t))$.

Exemples

E 1 – Pour $t \in [0, 2\pi]$, $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Le support de l'arc $\big([0, 2\pi], f\big)$ est le cercle unité.

E 2 – Pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = (x_0 + at, y_0 + bt)$. Le support de l'arc $(\mathbb{R}, f)$ est la droite $D = (x_0, y_0) + \mathbb{R}(a, b)$.

E 3 – Une courbe d'équation cartésienne $y = \varphi(x)$ où φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est le support de l'arc (I, f) où $f : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \big(t, \varphi(t)\big) \end{array} \right.$

E 4 – Si $a, R \in \mathbb{R}_*^+$, $f : t \in \mathbb{R} \mapsto (R\cos t, R\sin t, at) \in \mathbb{R}^3$, le support de l'arc est une hélice inscrite sur le cylindre d'axe (Oz) et de base le cercle de centre O et de rayon R.

Remarques

R 1 – Usuellement, on confond (abusivement) l'arc et son support.

R 2 – Dans la pratique, on a souvent affaire à des courbes paramétrées qui sont des réunions d'arc paramétrés (lorsque l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles).

R 3 – Interprétation cinématique

On peut a priori voir $f(t)$, pour $t \in I$, de deux manières différentes :
- Comme les coordonnées $(x(t), y(t))$ d'un point mobile $M(t)$ du plan (point de vue *affine*) ;
- Comme les coordonnées $(x(t), y(t))$ d'un vecteur mobile $\overrightarrow{OM(t)}$ (point de vue *vectoriel*).

Alors, lorsque ces quantités existent, $f'(t)$ représente la vitesse (plus exactement le vecteur vitesse), et $f''(t)$ représente l'accélération (plus exactement le vecteur accélération) du point mobile $M(t)$ à l'instant $t \in I$.

Le support de Γ de l'arc est alors la *trajectoire* du point mobile M.

On parle de *mouvement uniforme* lorsque la vitesse est constante en norme, de *mouvement rectiligne* lorsque la trajectoire est contenue dans une droite du plan.

2 Régularité

Définition

Soit (I, f) un arc paramétré. On dit que le point M de paramètre t est ***régulier*** lorsque $f'(t) \neq 0_E$. Dans le cas contraire, M est dit ***singulier*** ou ***stationnaire***.

L'arc est dit ***régulier*** lorsque tous ses points le sont.

Exemples

E 1 – Une courbe d'équation $y = \varphi(x)$ est régulière.

E 2 – Un cercle est régulier.

3 Étude locale, tangente

Définition : demi-tangentes

Soit (I, f) un arc paramétré, $M_0 = f(t_0)$ un point de paramètre $t_0 \in \mathring{I}$, et $M(t) = f(t)$ un point de paramètre t distinct de M_0. On suppose qu'au voisinage (strict) de t_0, $f(t) \neq f(t_0)$.

On appelle ***demi-tangente à gauche*** (resp. ***demi-tangente à droite***) à l'arc en M_0, lorsqu'elle existe, la demi-droite passant par M_0 ayant pour vecteur directeur la limite de $\dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{M_0M(t)}\right\|}\overrightarrow{M_0M(t)}$ lorsque t tend vers t_0 à gauche (resp. à droite).

On parle de ***tangente*** en M_0 lorsque les deux demi-droites sont contenues dans la même droite.

Propriété

Soit (I, f) un arc paramétré, $M_0 = f(t_0)$ un point de paramètre $t_0 \in \mathring{I}$ régulier.
Il y a une tangente en M_0 dirigée par $f'(t_0)$.

Démonstration

Soit $h = t - t_0 \neq 0$.

Comme $f(t) - f(t_0) = hf'(t_0) + o(h)$, $\|f(t) - f(t_0)\| = \|hf'(t_0) + o(h)\| = |h|\,\|f'(t_0) + o(1)\|$, donc $\dfrac{1}{\|f(t) - f(t_0)\|}(f(t) - f(t_0)) = \dfrac{1}{|h|\,\|f'(t_0) + o(1)\|}(hf'(t_0) + o(h))$ qui tend vers $\operatorname{sgn}(h)\dfrac{1}{\|f'(t_0)\|}f'(t_0)$ lorsque h tend vers 0, i.e. t tend vers t_0. □

Remarques

R1 – Pour un arc paramétré plan, avec le produit scalaire canonique, la droite passant par $M_0 = M(t_0)$ et dont $f'(t_0)$ est un vecteur normal est appelée **normale** à l'arc paramétré (I, f) en M_0.

On peut alors déterminer une équation de la tangente : $\begin{vmatrix} x - x_0 & x'_0 \\ y - y_0 & y'_0 \end{vmatrix} = y'_0(x - x_0) + x'_0(y - y_0)$ ce qui permet de retrouver l'équation de la tangente dans le cas d'une courbe d'équation $y = \varphi(x)$.

Équation de la normale : $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = 0$ soit $x'_0(x - x_0) + y'_0(y - y_0) = 0$.

R2 – Si le point est singulier (HP), deux possibilités :

- Si f est suffisamment régulière et p est le plus petit entier tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0_E$ (s'il existe), alors une démonstration similaire avec $f(t) - f(t_0) = h^p f^{(p)}(t_0) + o\left(h^p\right)$ permet de montrer qu'il y a une tangente, dirigée par $f^{(p)}(t_0)$.
- On peut aussi chercher la limite du taux d'accroissement $\dfrac{y(t) - t_0}{x(t) - x_0}$ lorsque $t \to t_0$ qui donne la pente de la tangente (si elle existe).

4 Plan d'étude d'un arc paramétré plan

Méthode : Plan d'étude d'un arc paramétré plan

On étudie l'arc paramétré $t \mapsto f(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$.

1. Domaine de définition de f donc de x **et** y. En général une réunion d'intervalles.
2. Réduction du domaine d'étude : effets géométrique de transformations $t \mapsto -t$, $t \mapsto \dfrac{1}{t}$, $t \mapsto t + T$, $t \mapsto T - t$, etc.
3. Étude de la classe $\mathscr{C}^1$, variations conjointes de x et y.
4. Tangente en des points particuliers.
5. Tracé.

Remarque : Branches infinies (hors-programme)

Les droites asymptotes horizontales se trouvent facilement : $(x(t), y(t)) \to (\pm\infty, y_0)$ ou $(x(t), y(t)) \to (x_0, \pm\infty)$.
Pour les droites obliques, c'est comme pour les courbes $y = \varphi(x)$: $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to a$ puis $y(t) - ax(t) \to b$...

Exemples

E1 – Folium de Descartes : $x(t) = \dfrac{t}{1 + t^3}$ et $y(t) = \dfrac{t^2}{1 + t^3}$.

x, y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

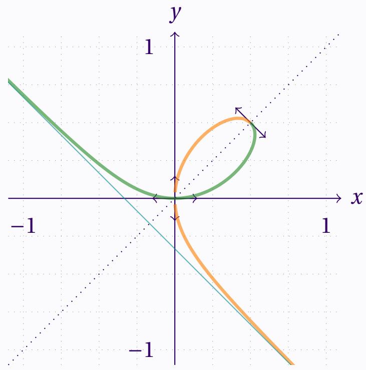
Si $t \neq 0$, on remarque que $x\left(\frac{1}{t}\right) = y(t)$. Il suffit d'étudier sur $]-1, 1]$ puis une symétrie d'axe $y = x$ donnera toute la courbe.

On calcule pour $t \in]-1, 1]$, $x'(t) = \dfrac{1 - 2t^3}{\left(1 + t^3\right)^2}$ et $y'(t) = \dfrac{t\left(2 - t^3\right)}{\left(1 + t^3\right)^2}$.

On a $x(t) \xrightarrow[t \to -1]{} -\infty$ et $y(t) \xrightarrow[t \to -1]{} +\infty$ puis $\dfrac{y(t)}{x(t)} = t \xrightarrow[t \to -1]{} -1$ et enfin $y(t) + x(t) = \dfrac{t + t^2}{1 + t^3} = \dfrac{t}{t^2 - t + 1} \xrightarrow[t \to -1]{} -\dfrac{1}{3}$ donc la droite d'équation $y = x - \dfrac{1}{3}$ asymptote lorsque $t \to -1$.

On trace le tableau de variations et la courbe :

t	-1		0		$1/\sqrt[3]{2}$		1
$x(t)$		$+$	1	$+$	0	$-$	$-1/4$
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}/3$	$\searrow$	$1/2$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}/3$	$\nearrow$	$1/2$
$y(t)$		$-$	0	$+$	$\neq 0$	$+$	$1/4$
Infos	$y = x - 1/3$		$\leftrightarrow$		$\updownarrow$		$\nwarrow$



E2 – **Courbe de Lissajous** : $x(t) = \cos 3t$ et $y(t) = \sin 2t$. x, y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
$x(t+\pi) = -x(t)$ et $y(t+\pi) = y(t)$ donc étude sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ puis symétrie d'axe (Oy).
x paire et y impaire, donc étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ puis symétrie d'axe (Ox).
On calcule pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x'(t) = -3\sin 3t$ et $y'(t) = 2\cos 2t$.
On trace le tableau de variations et la courbe :

t	0		$\pi/4$		$\pi/3$		$\pi/2$
$x(t)$	0	$-$	$\neq 0$	$-$	0	$+$	3
$x(t)$	1	$\searrow$	$-\sqrt{2}/2$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\sqrt{3}/2$	$\searrow$	0
$y(t)$	$\neq 0$	$+$	0	$-$	$\neq 0$	$-$	-2
Infos	$\updownarrow$		$\leftrightarrow$		$\updownarrow$		$(3,-2)$