

chapitreXXX

Calcul différentiel

Dans tout le chapitre, E et F désignent des \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimension finie nulle, \mathcal{U} désigne un ouvert de E .

Dérivées partielles

Dans cette partie, \mathcal{U} est un ouvert non vide de \mathbb{R}^p , où $p \in \mathbb{N}^*$.

1 Compléments sur la continuité des fonctions de variable vectorielle

Lemme : « de partition »

Soit A une partie de E , $f : A \rightarrow F$, B_1, B_2 deux parties de A telles que $B_1 \cup B_2 = A$, $a \in \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$, $\ell \in F$.
Si $f|_{B_1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $f|_{B_2}(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.
En particulier, si $a \in A$, f est continue en a .

2 Dérivées partielles

\mathcal{U} est toujours un ouvert de \mathbb{R}^p .

Définition

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{U}$, $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On appelle j^{e} **application partielle de f en a** l'application $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_p)$.

Définition : Dérivées partielles

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{U}$, $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On appelle j^{e} **dérivée partielle de f en a** , lorsqu'elle existe, la dérivée de la j^{e} application partielle de f en a . On note $\partial_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ le nombre dérivé en ce point.

On appelle j^{e} **dérivée partielle** la fonction définie sur \mathcal{U} par $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Définition : Extension aux fonctions à valeurs vectorielles

Soit \mathcal{U} ouvert de \mathbb{R}^p et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$. On note $f = (f_1, \dots, f_n) : f_i$ est la i^{e} composante de f .

On dit que f admet des dérivées partielles en $a \in \mathcal{U}$ si chacune des f_i admet une dérivée partielle en a .

On appelle alors **dérivée partielle de f en a** le vecteur

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \right).$$

Définition : Matrice jacobienne

Soit \mathcal{U} ouvert de \mathbb{R}^p et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$. On note $f = (f_1, \dots, f_n)$. On appelle, lorsque existe, **matrice jacobienne de f en a** la matrice

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \\ 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p \end{pmatrix}$$

3 Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Définition

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} lorsqu'en tout point de \mathcal{U} , les dérivées partielles de f existent, et que ces dérivées partielles sont continues.

On note $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble de ces fonctions.

Propriété

On note $f = (f_1, \dots, f_n)$. Alors f est de classe \mathcal{C}^1 si et seulement si chacune des f_i l'est.

Propriété

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel et $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ est une \mathbb{R} -algèbre.

Théorème : DL₁

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et $a \in \mathcal{U}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^p$ tel que $a+h \in \mathcal{U}$,

$$f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + h_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) + o_{h \rightarrow 0}(h).$$

Corollaire

Une fonction de classe \mathcal{C}^1 est continue.

Propriété : Règle de la chaîne

Soient \mathcal{U}, \mathcal{V} deux ouverts respectifs de \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^n et $a \in \mathcal{U}$. Soient

$$f : \begin{matrix} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_n(x_1, \dots, x_p)) \end{matrix}$$

et

$$g : \begin{matrix} \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (y_1, \dots, y_n) & \longmapsto & g(y_1, \dots, y_n) \end{matrix}$$

deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Alors $g \circ f = g \circ (f_1, \dots, f_n)$ est de classe \mathcal{C}^1 et pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$



Cas particulier : important

Si $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe \mathcal{C}^1 , en notant, pour $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$,

$$(f \circ \gamma)'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) + z'(t) \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)).$$

Corollaire

Soient \mathcal{U}, \mathcal{V} deux ouverts respectifs de \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^n et $a \in \mathcal{U}$. Soient $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ et $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^q$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Alors $g \circ f$ est de classe \mathcal{C}^1 et pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket 1, q \rrbracket$,

$$\frac{\partial (g_\ell \circ f)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial (g_\ell \circ f)_\ell}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_\ell}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

En particulier,

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) J_f(a).$$

4 Fonctions de classe \mathcal{C}^k

Définition : Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit \mathcal{U} ouvert de \mathbb{R}^p , $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$. On appelle **dérivée partielle d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$** , une dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ où φ est une dérivée partielle d'ordre $k-1$ de f . Les dérivées partielles d'ordre k sont de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \left(\dots \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \dots \right) \right)$$

noté $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f$ où $i_1, \dots, i_k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Définition

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{U} ouvert de \mathbb{R}^p , $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que **f est de classe \mathcal{C}^k** si toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues.

On dit que **f est de classe \mathcal{C}^∞** si elle est de classe \mathcal{C}^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Propriété

On note $f = (f_1, \dots, f_n)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Alors f est de classe \mathcal{C}^k si et seulement si chacune des f_i l'est.

Théorème : de Schwarz

Soit \mathcal{U} ouvert de \mathbb{R}^p , $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe \mathcal{C}^2 . Alors, pour tout $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $i \neq j$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Propriété

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

- (i) Toute combinaison linéaire, toute composée, tout produit, tout quotient de fonctions de classe \mathcal{C}^k l'est encore.
- (ii) Si $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$, bilinéaire, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^q$ de classe \mathcal{C}^k alors $B(f, g)$ est de classe \mathcal{C}^k .
- (iii) Toute fonction polynomiale à n variables est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^n .
- (iv) Toute fonction rationnelle (quotient de fonctions polynomiales) est de classe \mathcal{C}^∞ sur son domaine de définition.

II Applications

\mathcal{U} désigne toujours un ouvert de \mathbb{R}^p .

1 Extremums

Définition : Extremum

Soit A une partie de \mathbb{R}^p , $a_0 \in A$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) On dit que f présente en a_0 un **maximum** (respectivement **minimum**) local s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $a \in B(a_0, r)$, $f(a) \leq f(a_0)$ (respectivement $f(a) \geq f(a_0)$).
- (ii) On dit que f présente un **maximum** (respectivement **minimum**) global si cette inégalité est en fait valable pour tout $a \in A$.

Définition : Vecteur gradient

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en $a \in \mathcal{U}$. On appelle **gradient** de f en a le vecteur

$$\nabla f(a) = \overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right) \in \mathbb{R}^p.$$

Lorsque $\nabla f(a) = 0$, on dit que a est un **point critique** de f .

Propriété : Condition nécessaire d'extremum local

Soit \mathcal{U} ouvert (très important!) de \mathbb{R}^p , $a \in \mathcal{U}$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en a .

Si f présente un extremum local en a , alors a est un point critique de f , c'est-à-dire que toutes les dérivées partielles de f en a sont nulles.

La réciproque est fautive, et un contre-exemple est appelé **point selle** ou **point col**.



Méthode : Recherche d'extremum

- (i) Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles sur \mathcal{U} . Pour déterminer des extremums locaux de f on cherche ses points critiques. Puis, pour chaque point critique a , on étudie $f(a+h) - f(a)$ pour h proche de 0. Comme a est un point critique, les termes obtenus dans la différence sont au moins d'ordre 2.

- (ii) Si \mathcal{U} n'est pas un ouvert, on le décompose en son intérieur (ouvert) et son bord. Sur le bord, on étudie « à la main », en général à l'aide d'un paramétrage du bord.
- (iii) Si $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ où K est un compact, on est assuré de l'existence d'un minimum et d'un maximum globaux. On les cherche comme dans la méthode précédente.

2 Équations aux dérivées partielles



Méthode

- Savoir résoudre les ÉDP fondamentales auxquelles on se ramène systématiquement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 & & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x) & & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0 & & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 & & \end{aligned}$$

- Dans la pratique, on s'y ramène via un changement de variables $(u, v) = \varphi(x, y)$, en écrivant $f(x, y) = g(u, v)$ et en remplaçant soit (x, y) en fonction de (u, v) , soit (u, v) en fonction de (x, y) .
- La changement de variable doit être bijectif, entre deux ouverts et suffisamment régulier (classe \mathcal{C}^1 ou \mathcal{C}^2 suivant l'ordre de l'équation.)
- S'il n'est pas donné, il doit être affine ou polaire.
- Appliquer la règle de la chaîne (ou utiliser des matrices jacobiniennes) pour exprimer les dérivées de f en fonction de celle de g ou l'inverse, et simplifier l'ÉDP.

Propriété

Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .

2 Cas particuliers

Propriété : Cas d'une fonction d'une variable réelle

Dans le cas d'une fonction $f : I \rightarrow F$, f est dérivable en a si et seulement si elle est différentiable en a .

Dans ce cas, $df(a) : h \mapsto hf'(a)$ et en particulier $f'(a) = df(a)(1)$.

Propriété : Cas d'une fonction constante

Si $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ est constante, elle est différentiable en tout point de \mathcal{U} et pour tout $a \in \mathcal{U}$, $df(a) = 0_{\mathcal{L}(E, F)}$.

Propriété : Cas d'une fonction linéaire

Si $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ est la restriction à \mathcal{U} d'une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, elle est différentiable en tout point de \mathcal{U} et pour tout $a \in \mathcal{U}$, $df(a) = \varphi$ (et donc df est constante).

III Différentielle

1 Différentielle en un point

Rappel : si I est intervalle de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow F$ est dérivable en $a \in I$ si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si on a un vecteur $b \in F$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + hb + o_{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}}}(h)$$

(et, dans ce cas, $b = f'(a)$).

Nous allons généraliser cette idée aux fonctions définies sur une espace vectoriel normé de dimension finie E .

Définition : Application différentiable en un point

Soit f définie sur un ouvert \mathcal{U} de E , à valeurs dans F . Soit a un point de \mathcal{U} . On dit que f est **différentiable** en a lorsqu'il existe une application linéaire ℓ_a de E dans F telle que, au voisinage de 0_E ,

$$f(a+h) = f(a) + \ell_a(h) + o_{h \rightarrow 0_E}(h)$$

ou encore, au voisinage de a ,

$$f(x) = f(a) + \ell_a(x-a) + o_{x \rightarrow a}(x-a).$$

Lorsqu'elle existe, l'application ℓ_a est unique et appelée **différentielle** de f au point a ou encore **application linéaire tangente** à f en a , notée $df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$. On a donc

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o_{h \rightarrow 0_E}(h)$$

3 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Le fait de travailler sur un ouvert \mathcal{U} assure, pour a point de \mathcal{U} et v vecteur de E , l'existence d'un $\delta > 0$ (« distance de sécurité ») tel que pour tout $t \in]-\delta, \delta[$, $a + tv \in \mathcal{U}$ (on s'éloigne de a dans la direction de v , cela permet de définir l'application $\phi : t \mapsto f(a + tv)$ d'une variable réelle au voisinage de 0.

Définition

On dit que $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ est **dérivable selon le vecteur** $v \in E$ **au point** $a \in \mathcal{U}$, lorsque $\phi : t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0.

On note alors $D_v f(a) = \phi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in F$.

Définition : Dérivées partielles

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$, $a \in \mathcal{U}$, $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

On appelle **j^{e} dérivée partielle de f en a** , lorsqu'elle existe, la dérivée de f selon le vecteur e_j de base en a :

$$\partial_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_{e_j} f(a) \in F.$$



4 Lien entre différentielle et dérivées partielles

Propriété

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, $a \in \mathcal{U}$. Si f est différentiable en a , alors f est dérivable en a selon tout vecteur $v \in E$ et $D_v f(a) = df(a)(v)$.

Cas particulier

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, $a \in \mathcal{U}$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . On note $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ les dérivées partielles de f dans la base \mathcal{B} .

Si f est différentiable en a , alors pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$df(a)(e_j) = D_{e_j} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Propriété

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, $a \in \mathcal{U}$ tel que f est différentiable en a .

Alors pour tout vecteur $h = \sum_{j=1}^p h_j e_j \in E$,

$$df(a)(h) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

On note $dx_j : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ h & \mapsto h_j \end{cases}$ la forme linéaire j^e coordonnée dans \mathcal{B} . Alors on a

$$df(a) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j.$$

5 Matrice jacobienne

Définition : Matrice jacobienne

Soit $p = \dim E$, $n = \dim F$, \mathcal{U} ouvert de E et $f : E \rightarrow F$ différentiable, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F . On note $f = \sum_{i=1}^n f_i \varepsilon_i$.

On appelle **matrice jacobienne** de f en a dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} la matrice $J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$.

Propriété : Matrice jacobienne et différentielle

$$J_f(a) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(df(a))$$

IV Opérations sur les différentielles

1 Combinaisons linéaires

Propriété

Soit \mathcal{U} ouvert de E , $f, g : \mathcal{U} \rightarrow F$ différentiables en $a \in \mathcal{U}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable et

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a).$$

2 Image par une application bilinéaire

Lemme

Si E, F, G espaces vectoriels normés de dimension finie, $B : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire, alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$ et $y \in F$,

$$\|B(x, y)\|_G \leq C \|x\|_\infty \|y\|_\infty$$

où les normes infinies sont prises dans des bases \mathcal{B} et \mathcal{C} de E et F . L'équivalence des normes permet de les remplacer par des normes quelconques (quitte à changer C).

Propriété

Soit \mathcal{U} ouvert d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie, E, F, G des \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimension finie, $f : \mathcal{U} \rightarrow E$ et $g : \mathcal{U} \rightarrow F$ des applications différentiables en $a \in \mathcal{U}$ et $B : E \times F \rightarrow G$ une fonction bilinéaire.

Alors $\phi : \mathcal{U} \rightarrow G$ définie par $\phi : x \mapsto B(f(x), g(x))$ est différentiable en a et

$$d\phi(a) : h \mapsto B(df(a)(h), g(a)) + B(f(a), dg(a)(h)).$$

3 Composition

Propriété : Différentielle d'une composée

Soit \mathcal{U} ouvert de E , \mathcal{V} ouvert de F , $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ différentiable en $a \in \mathcal{U}$ et $g : \mathcal{V} \rightarrow G$ différentiable en $b = f(a)$.

Alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

Propriété : Matrice jacobienne d'une composée

En munissant E , F et G de bases, on obtient

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a).$$

Corollaire : Dérivée le long d'un arc

Soit \mathcal{U} ouvert de E , $f: \mathcal{U} \rightarrow F$, I intervalle de \mathbb{R} et $\gamma: I \rightarrow \mathcal{U}$ une application dérivable.

On suppose que f est différentiable en $\gamma(t)$ où $t \in I$. Alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t)).$$

En munissant E d'une base, on retrouve l'expression vue avec la règle de la chaîne

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{k=1}^p \gamma'_k(t) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)).$$

V Classe \mathcal{C}^1 **Définition : Fonctions de classe \mathcal{C}^1**

$f: \mathcal{U} \rightarrow F$ est dite **de classe \mathcal{C}^1** lorsque f est différentiable sur \mathcal{U} et $df: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est continue.

Propriété

Toute combinaison linéaire, toute composée d'applications de classe \mathcal{C}^1 l'est encore.
Si B est bilinéaire et f, g sont \mathcal{C}^1 , $B(f, g)$ l'est.

Propriété

Soit $f: \mathcal{U} \rightarrow F$, d'applications coordonnées (f_1, \dots, f_n) dans une base de F . f est de classe \mathcal{C}^1 si et seulement si toutes les f_i le sont.

Théorème : IMPORTANT - Caractérisation avec les dérivées partielles

f est de classe \mathcal{C}^1 si et seulement si, dans une base quelconque de E , toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues.

Propriété

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, F)$, $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathcal{U})$, $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$. Alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt.$$

Corollaire : Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, F)$ et \mathcal{U} est connexe par arcs, alors f est constante si et seulement si $df = 0$.

VI Gradient et points critiques**Définition - Propriété : Gradient**

Soit E un espace **euclidien**, \mathcal{U} un ouvert de E , $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors pour tout $a \in \mathcal{U}$, il existe un unique vecteur noté $\nabla f(a)$ ou $\text{grad} f(a)$ et appelé **gradient de f en a** tel que pour tout $h \in E$, $df(a)(h) = (\nabla f(a)|h)$.

Propriété

Soit E un espace **euclidien**, \mathcal{U} un ouvert de E , $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Si l'on fixe une base **orthonormée** de E , les coordonnées de $\nabla f(a)$ dans cette base sont

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right).$$

Définition : Point critique

Soit $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable.

On dit que a est un **point critique** de f lorsque $df(a) = 0$.

Si E est euclidien, cela équivaut à $\nabla f(a) = 0$.

Propriété : Condition nécessaire d'extremum local

Soit \mathcal{U} ouvert (très important) et $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \mathcal{U}$.

Si f présente un **extremum local** en a , alors a est un **point critique** de f , c'est-à-dire $df(a) = 0$.

VII Géométrie différentielle**Définition : Vecteur tangent**

Si A est une partie de E , $a \in A$. Un vecteur $v \in E$ est dit **tangent** à A en a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow A$, dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Définition : Ligne de niveau

Soit \mathcal{U} un ouvert de E , $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle **ligne de niveau λ** pour f l'ensemble

$$A_\lambda = \{u \in \mathcal{U}, f(u) = \lambda\}.$$

Propriété

Si E est euclidien, f est différentiable et la ligne de niveau $A_\lambda \neq \emptyset$ (d'équation $f(u) = \lambda$), alors pour tout $a \in A_\lambda$, $\nabla f(a)$ est orthogonal à tout vecteur tangent à A_λ en a .



Corollaire

Si f est différentiable sur l'ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 à valeurs réelles, \mathcal{C} la courbe d'équation $f(x, y) = \lambda$ (dite implicite), $a_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ alors si $\nabla f(a) \neq 0$, c'est un vecteur normal à \mathcal{C} en a_0 .

Propriété

Soit \mathcal{U} ouvert de \mathbb{R}^2 , $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable.

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface représentative de f , c'est-à-dire

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{U}, z = f(x, y)\}.$$

$$\text{Soit } \varphi : \begin{cases} U \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto z - f(x, y) \end{cases}$$

L'ensemble des vecteurs tangents à S en $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ est un plan vectoriel P de vecteur normal $\nabla \varphi(a)$, donc d'équation $\nabla \varphi(a) \cdot (x, y, z) = 0$.

On appelle **espace tangent à S en a_0** le sous-espace affine $a_0 + P$, d'équation $\nabla \varphi(a_0) \cdot (a - a_0) = 0$ où $a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.