30 Déterminer les extremums locaux des fonctions $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$
3. $h(x,y) = x^3 + y^3$
4. $i(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$
5. $j(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. $\mathbb{R}^2$ ouvert, f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x - 6 \end{cases}$

Point critique : $(0,3)$

$f(h,3+k) - f(0,3) = h^2 + h(3+k) + (3+k)^2 - 3h - 6(3+k) - (3^2 - 6\times 3)$

$= h^2 + hk + k^2$

$= \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2 \geqslant 0$

f réalise en $(0,3)$ un minimum global.

2. $\mathbb{R}^2$ ouvert, g $\mathcal{C}^1$

$\forall (x,y), \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y - 2x - 2 \end{cases}$

Point critique : $(1,1)$

$g(1+h, 1+k) - g(1,1) = (1+h)^2 + 2(1+k)^2 - 2(1+h)(1+k) - 2(1+k) + 5 - 4$

$= h^2 + 2k^2 - 2hk = (h-k)^2 + k^2$

$\geqslant h^2 + k^2 - 2hk = (h-k)^2$

Min global.

3. $h(x,y) = x^3 + y^3$ $\qquad h$ $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$ $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 3x^2$

$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 3y^2$

Point critique : $(0,0)$

$\forall x \in \mathbb{R}, h(x,0) = x^3 \geqslant 0 = h(0,0)$ si $x \geqslant 0$ $\qquad$ Point selle.

$\leqslant 0 = h(0,0)$ si $x \leqslant 0$

4) $i(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3 \qquad i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

$\forall (x,y), \begin{cases} \frac{\partial i}{\partial x}(x,y) = 2(x-y) + 3(x+y)^2 = 0 \\ \frac{\partial i}{\partial y}(x,y) = -2(x-y) + 3(x+y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 0 \\ x-y = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

Point critique : $(0,0)$.

$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \quad i(h,k) - i(0,0) = (h-k)^2 + (h+k)^3$

$= h^2 - 2kh + k^2 + h^3 + 3h^2k + 3hk^2 + k^3$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad i(x,x) = 8x^3 \begin{cases} \geq 0 \text{ si } x \geq 0 \\ \leq 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$ pt selle.

5 $j(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy \qquad j \ \mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{\partial j}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial j}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = x \\ y = x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x,y) \in \{(0,0), (1,1)\}$

$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2,$

$j(h,k) - j(0,0) = h^3 + k^3 - 3kh.$

$j(h,0) - j(0,0) = h^3 \begin{cases} \leq 0 \text{ si } h \leq 0 \\ \geq 0 \text{ si } h \geq 0 \end{cases}$ pt selle.

$j(1+h, 1+k) - j(1,1) = (1+h)^3 + (1+k)^3 - 3(1+h)(1+k) - (-1)$

$= 3h^2 + h^3 + 3k^2 + k^3 - 3hk$

$= 3[h^2 - hk + k^2] + h^3 + k^3$

$= \underbrace{3\left[\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right]}_{\geq 0} + \underbrace{h^3 + k^3}_{= \underset{(h,k)\to 0}{o}(\|(h,k)\|^2)}$

$|h^3| = h^2 \times |h| \leq \|(h,k)\|_\infty^2 \times \underbrace{|h|}_{\underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0}$ donc $\frac{h^3}{\|(h,k)\|^2} \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

donc $h^3 = o(\|(h,k)\|^2)$

idem pour k^3.

Donc $j(1+h, 1+k) - j(1,1) = 3\underbrace{\left[\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}h^2\right]}_{\neq 0 \text{ ? oui si } (h,k) \neq (0,0)} + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}(\|(h,k)\|^2)$

Si $(h,k) \neq (0,0)$, $\quad j(1+h, 1+k) - j(1,1) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\sim} 3\left[\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}h^2\right] \geq 0$

Minimum <u>local</u>.

33 **CCINP** Étudier les extrema de la fonction définie par $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

défini sur $K = \overline{D}((0,0),2) = \{(x,y),\ x^2+y^2 \leq 4\}$ fermé borné en df donc compact

$\forall (x,y) \in \overline{D}((0,0),2),\ \|(x,y)\|_2 \leq 2$

fermé par caract. séq. ou disque fermé

ou $g^{-1}(\underbrace{[0;4]}_{\text{fermé}})$ où $g:(x,y) \mapsto x^2+y^2$ C^0

$f \in \mathcal{C}(K)$ donc f atteint un min et un max globaux sur K.

$(f \in \mathcal{C}^\infty(\mathring{K}))$

Sur $\mathring{K}$: recherche de pt critique.

$\forall (x,y) \in \mathring{K},\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

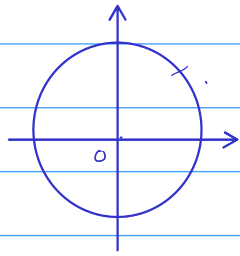
Pt critique $(0,0)$

$\forall (h,k) \in K,\ f(h,k) - f(0,0) = \sqrt{4-(h^2+k^2)} - 2 \leq 0$

$[\ \forall (x,y) \in K,\ f(x,y) \leq 2 = f(0,0)\ ]$

En $(0,0)$, le max global de f est atteint.

Le min global n'est donc pas atteint sur $\mathring{K}$.



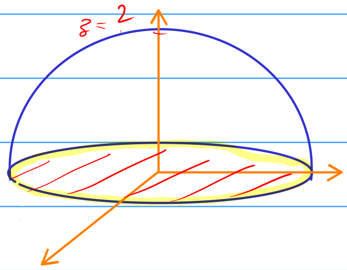
On paramètre $Fr(K) = \mathcal{C}((0,0),2) = \{(x,y)\ ;\ x^2+y^2 = 4\}$

Soit $(x_0,y_0) \in Fr(K)$, $f(x_0,y_0) = 0$

$\forall (x,y) \in K,\ f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$

$\min f = 0$ atteint sur tout $\mathcal{C}((0,0),2)$.

<u>Mieux</u> : $z = f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 4 \\ z \geq 0 \end{cases}$



max $f = 2$ atteint en $(x,y) = (0,0)$

min $f = 0$ atteint en $(x,y) \in \mathcal{C}((0,0),2)$

35 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ i.e. telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}_*^+, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y).$$

Montrer que $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$, puis étudier la réciproque.

Soit f une telle fonction. On fixe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\forall t \in \mathbb{R}^*_+$, $f(tx,ty) = t^\alpha \underline{f(x,y)}$

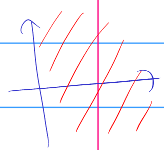
$t \mapsto f(tx,ty)$ dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$

$t \mapsto t^\alpha f(x,y)$ ———

$\forall t \in \mathbb{R}^*_+$, $x \times \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\partial_1 f}(tx,ty) + y \times \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{\partial_2 f}(tx,ty) = \alpha t^{\alpha-1} f(x,y)$

Puis on évalue en $t=1$.

Réciproque : $(*)$ $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$



CV en coord. polaire. Pour avoir un cv bijectif, régulier,

on se place sur $U = \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$ (pour (x,y)) ie sur $V = \mathbb{R}^*_+ \times \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ pour (r,θ).

$\varphi(r,\theta) = x,y$
- φ bijective
- φ $\mathscr{C}^1$ ($\mathscr{C}^1$-difféo.)
- $\varphi^{-1} \in \mathscr{C}^1$

$f(x,y) = g(r,\theta)$

$f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ $\qquad \theta = \operatorname{Arctan}\frac{y}{x}$

g est $\mathscr{C}^1$ car f l'est.

$\forall (r,\theta) \in V$, $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$

f solution de $(*)$ sur U ssi $\forall (r,\theta) \in V$, $r \times \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \alpha g(r,\theta)$

ssi $\forall (r,\theta) \in V$, $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\alpha}{r} g(r,\theta)$

$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{r}$ $\rightarrow$ $\boxed{y' = \frac{\alpha}{r} y}$

ssi $\exists \varphi \in \mathscr{C}^1(]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[)$, $\forall (r,\theta) \in V$, $g(r,\theta) = \varphi(\theta) \times e^{\alpha \ln|r|} = \varphi(\theta) r^\alpha$ ($r \in \mathbb{R}^*_+$ intervalle)

ssi $\exists \varphi \in \mathscr{C}^1(]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[)$, $\forall (x,y) \in U$, $f(x,y) = \varphi(\operatorname{Arctan}(\frac{y}{x}))(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}$

ssi $\exists \psi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, $\forall (x,y) \in U$, $f(x,y) = \psi(\frac{y}{x})(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}$.

$\psi = \varphi \circ \operatorname{Arctan}$

Ces solutions sont-elles α-homogènes ?

$\forall t > 0$, $\forall (x,y) \in U$, $f(tx,ty) = \psi(\frac{ty}{tx})(t^2(x^2+y^2))^{\frac{\alpha}{2}} = t^\alpha f(x,y)$.

(38) **1.** $\begin{cases} \boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 y \quad (2) \end{cases}$ sur $\mathbb{R}^2$

Analyse : Si f est solution,

On a $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \varphi(y)$ (car $x \in \mathbb{R}$ intervalle)

On réinjecte dans (2) : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2y + \varphi'(y) = x^2 y$

ie $\forall y \in \mathbb{R}$, $\varphi'(y) = 0$

$\mathbb{R}$ intervalle donc φ est cste.

donc $f : (x,y) \longmapsto \frac{x^2y^2}{2} + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Synthèse : Ces f° sont bien solu°.

(43) $f : M \longmapsto \boxed{M^T \times M}$

$\forall M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $f(M+H) = (M+H)^T \times (M+H)$

$= (M^T + H^T) \times (M+H)$

$= f(M) + \underbrace{(H^T \times M + M^T \times H)}_{\text{linéaire en } H} + \underbrace{H^T \times H}_{\underset{H\to 0}{=} o(H)}$?

On choisit N norme sous-mult, si $H \neq 0$,

$0 \leq \dfrac{N(H^T H)}{N(H)} \leq \dfrac{N(H^T) \times N(H)}{N(H)} = N(H^T) \longrightarrow 0$

car $H^T \underset{H\to 0}{\longrightarrow} 0^T$ car $\cdot^T$ lin. et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ df donc elle est C^0.

f différentiable en M et $df(M) : H \longmapsto \underbrace{H^T M + M^T H}$.

ou $df(M)(H) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} h_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_{i,j}}(M)$

(44) 1_ $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ det C^0 car polynomial en les coeff de M

2_

Si $M, H \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$, $(M+H)^{-1} = (M(I_n + M^{-1}H))^{-1} = (I_n + \underbrace{M^{-1}H})^{-1} \times M^{-1} = \underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (M^{-1}H)^k M^{-1}}$

si $N(M^{-1}H) < 1$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ $\quad (I_n - X)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} X^k$ avec $N(X) < 1$

avec N norme sous-multiplicative

$$= \underbrace{M^{-1}}_{=f(M)} - \underbrace{M^{-1}HM^{-1}}_{\text{linéaire en } H} + \overbrace{\underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k (M^{-1}H)^k M^{-1}}_{\underset{H\to 0}{=} o(H)\ ?}}^{=A}$$

$M \mapsto M^{-1}$ polynôme en M via un polyn. annulateur

$$A = \sum_{\ell=0}^{+\infty} (-1)^\ell (M^{-1}H)^{\ell+2} M^{-1}$$

$$= (M^{-1}H)^2 \sum_{\ell=0}^{+\infty} (-1)^\ell (M^{-1}H)^\ell M^{-1}$$

autre méthode pour montrer que ce terme est borné

$= (M+H)^{-1} \xrightarrow[H\to 0]{} M^{-1}$ par c$^{\text{té}}$ de $M \mapsto M^{-1}$ par formule de la comatrice $M^{-1} = \frac{1}{\det M}(\mathrm{Com}\, M)^T$ ← polynomiales en M.

Soit N sous-mult.

$$N(A) \leq \underbrace{N(M^{-1}H)^2}_{\leq N(M^{-1})N(H)} \times N\Big(\overbrace{\sum_{\ell=0}^{+\infty} (-1)^\ell (M^{-1}H)^\ell}^{=B(H)}\Big) \times N(M^{-1})$$

$$\leq [N(M^{-1})]^3 \times [N(H)]^2 \times N(B(H))$$

$B(H)$ borné ?

Par absolue cv de la série géométrique

$$\Big[N(B(H)) \leq \sum_{\ell=0}^{+\infty} N((M^{-1}H)^\ell) \leq \sum_{\ell=0}^{+\infty} (N(M^{-1}H))^\ell = \frac{1}{1-N(M^{-1}H)} \leq 2$$

si $N(M^{-1}H) \leq \frac{1}{2}$

$$\text{donc } 0 \leq N(A) \leq N(H) \Big[\underbrace{2N(M^{-1})^3 \times N(H)}_{\xrightarrow[H\to 0]{} 0} \Big]$$

$$\text{donc } N(A) \underset{H\to 0}{=} o(H) \quad \Big(\frac{N(A)}{N(H)} \xrightarrow[H\to 0]{} 0 \Big)$$

Bilan $(M+H)^{-1} = M^{-1} \underbrace{- M^{-1}HM^{-1}}_{\text{lin en } H} + o(H)$

donc f diff en M et $\boxed{df(M)(H) = -M^{-1}HM^{-1}}$

$(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ n^2+1 vect. en dim n^2.